

Akademia Bialska Nauk Stosowanych im. Jana Pawła II

Mechanika budowli w przykładach

Siły wewnętrzne w statycznie wyznaczalnych
płaskich układach prętowych

Joanna Krętowska

Biała Podlaska 2023

Akademia Bialska Nauk Stosowanych im. Jana Pawła II

MECHANIKA BUDOWLI W PRZYKŁADACH

**Sily wewnętrzne w statycznie wyznaczalnych
płaskich układach prętowych**

Joanna Krętowska

Biała Podlaska 2023

Wydawca

Akademia Bialska Nauk Stosowanych im. Jana Pawła II

Recenzja

dr hab. inż. Janusz Krentowski
prof. dr hab. inż. Czesław Miedziałowski

© Copyright by Akademia Bialska Nauk Stosowanych
im. Jana Pawła II

ISBN 978-83-64881-91-6

Nakład: 100 egz.
Liczba arkuszy wydawniczych: 2,5 + grafika



Wydawnictwo ABNS JP II
ul. Sidorska 95/97, p. 334R
21-500 Biała Podlaska
www.akademiabialska.pl

Projekt okładki, skład i druk

druk-24h.com.pl
DRUKARNIA CYFROWA

Grabówka, ul. Szosa Baranowicka 77
15-523 Białystok; tel. 85 653-78-04
e-mail: biuro@partnerpoligrafia.pl

Spis treści

Przedmowa	5
----------------------------	----------

Rozdział 1

1. Statycznie wyznaczalne płaskie układy prętowe	7
1.1. Podstawowe pojęcia [2]	7
1.2. Geometryczna niezmiennność i statyczna wyznaczalność płaskich układów prętowych	8
1.2.1. Geometryczna niezmiennność [2]	8
1.2.2. Połączenia prętów i układów prętowych [2]	9
1.2.3. Geometryczna niezmiennność płaskich układów prętowych [2] ..	11
1.2.4. Statyczna wyznaczalność płaskich układów prętowych [2]	14
1.3. Typy płaskich układów prętowych	16

Rozdział 2

2. Siły wewnętrzne w statycznie wyznaczalnych płaskich układach prętowych	17
2.1. Definicja sił wewnętrznych [1],[3],[4]	17
2.2. Siły wewnętrzne w płaskich układach prętowych [3],[4],[5],[6]	19
2.2.1. Zależności różniczkowe między siłami wewnętrznymi i obciążeniem zewnętrznym [3]	20
2.3. Belki proste – siły wewnętrzne	23
2.3.1. Przykłady obliczeniowe – belki proste	40
2.4. Belki złożone	47
2.4.1. Przykłady obliczeniowe – belki złożone	48

2.4.2. Belki – zadania do samodzielnego rozwiązania	66
2.5. Płaskie układy ramowe – siły wewnętrzne	68
2.5.1. Przykłady obliczeniowe – ramy	69
2.5.2. Ramy – zadania do samodzielnego rozwiązania	94
2.6. Kratownice płaskie [1],[2],[3].....	96
2.6.1. Przykłady obliczeniowe – kratownice.....	104
2.6.2. Kratownice – zadania do samodzielnego rozwiązania	121
2.7. Łuki [2]	123
2.7.1. Siły wewnętrzne w łukach [2],[3]	126
2.7.2. Zależności różniczkowe między siłami wewnętrznymi i obciążeniem zewnętrznym [3]	127
2.7.3. Przykłady obliczeniowe – łuki	130

Rozdział 3

3. Rozwiązania zadań 145

3.1. Rozwiązania zadań z rozdziału 2.4.2.....	145
3.2. Rozwiązania zadań z rozdziału 2.5.2.....	166
3.3. Rozwiązania zadań z rozdziału 2.6.2.....	175

Literatura 180

Przedmowa

Celem proponowanego skryptu jest praktyczne zapoznanie czytelnika, poprzez prezentowanie przykładów, z analizą statycznie wyznaczalnych płaskich układów prętowych.

W dobie powszechnej komputeryzacji i dostępności zaawansowanego oprogramowania wspomagającego proces projektowania konstrukcji, studenci często zadają wykładowcy pytanie o celowość nauki, niekiedy zawiłych zagadnień mechaniki budowli i „ręcznego” przeprowadzania analiz statycznych. Odpowiedź na to pytanie wydaje się oczywista. Każdy inżynier, wykorzystując profesjonalne oprogramowanie wspomagające proces projektowania, powinien racjonalnie podchodzić do uzyskanych wyników, a tym samym, powinien umieć „ręcznie” zweryfikować poprawność przeprowadzonych analiz.

Skrypt adresowany jest w szczególności do studentów studiów stacjonarnych i niestacjonarnych kierunku budownictwo wyższych uczelni technicznych.

W ramach każdego rozdziału podaje się (skrótowo) podstawy teoretyczne niezbędne do rozwiązania przykładów, a następnie dokładnie prezentuje się same przykłady stanowiące zasadniczą treść książki.

Mam nadzieję, że analiza przedstawionych przykładów pomoże w samodzielnym rozwiązywaniu innych układów prętowych statycznie wyznaczalnych i w znacznym stopniu ułatwi w przyszłości studiowanie zagadnień statycznie niewyznaczalnych.

Jednocześnie będę niezmiernie wdzięczna za wszelkie merytoryczne uwagi dotyczące niniejszego skryptu.

Joanna Krętowska

Rozdział 1

1. Statycznie wyznaczalne płaskie układy prętowe

1.1. Podstawowe pojęcia [2]

Bryła sztywna – ciało trójwymiarowe, w którym odległość dwóch dowolnych punktów nie ulega zmianie niezależnie od działających na to ciało obciążeń.

Tarcza sztywna – ciało dwuwymiarowe (płaskie), w którym odległość dwóch dowolnych punktów nie ulega zmianie niezależnie od działających na to ciało obciążeń.

Pręt – ciało, którego jeden wymiar (długość) jest znacznie większy od dwu pozostałych (wymiarów poprzecznych). Figura tworząca kształt pręta, nazywa się przekrojem poprzecznym, a jej kontur, obwodem przekroju.

Modelem pręta jest linia, którą tworzą geometryczne środki figur płaskich, jakimi są przekroje prostopadłe do osi pręta.

Węzeł – element konstrukcji budowlanej łączący pręty (miejsce, w którym schodzą się pręty).

Układ prętowy – układ utworzony z jednego lub większej liczby prętów połączonych ze sobą w węzłach. Rozróżniamy układy prętowe płaskie i przestrzenne.

Tarczą sztywną może być zarówno jeden pręt jak też układ prętów, których osie leżą w jednej płaszczyźnie, w którym odległości między poszczególnymi punktami nie ulegają zmianie, o ile elementy składowe uważać będziemy za doskonale sztywne.

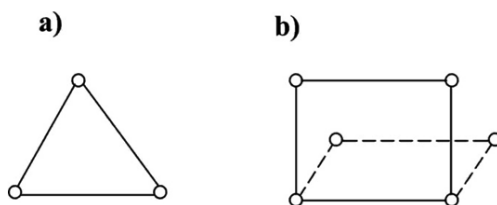
Konstrukcje stosowane w budownictwie stanowią na ogół układy przestrzenne, jednakże najczęściej można je rozłożyć na szereg układów płaskich, co w znacznym stopniu ułatwia obliczenia statyczne. Często mamy przy tym do czynienia z elementami konstrukcyjnymi, których rozmiary poprzeczne są małe w porównaniu z ich długością (z elementami prętowymi).

1.2. Geometryczna niezmiennność i statyczna wyznaczalność płaskich układów prętowych

1.2.1. Geometryczna niezmiennność [2]

Pod wpływem obciążeń działających na układ prętowy, poszczególne jego elementy doznają odkształceń, co powoduje zmianę kształtu całego układu. Układ prętowy geometrycznie niezmienny jest to układ, którego postać geometryczna nie ulega zmianom bez odkształcenia poszczególnych prętów. Przykładem układu geometrycznie niezmiennego jest trójkąt, utworzony z prętów (tarcz) połączonych przegubowo, gdyż nie można go przekształcić w inny trójkąt bez zmiany długości jego boków (Rys.1.1.a).

Układ prętowy, którego postać geometryczna może się zmieniać bez zmiany długości poszczególnych prętów jest układem geometrycznie zmiennym. Układem takim jest prostokąt utworzony z prętów połączonych przegubowo, gdyż można go przekształcić w równoległobok bez zmiany długości boków (Rys.1.1.b).

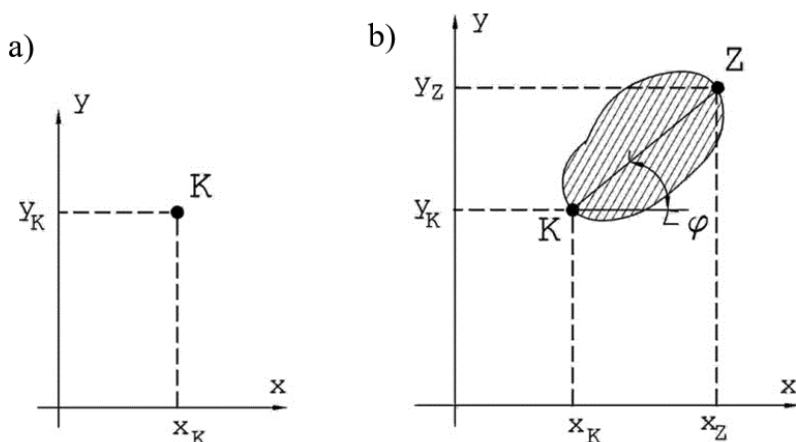


Rys.1.1.

Układ prętowy jeżeli ma spełniać właściwie swoje zadanie jako element konstrukcji, powinien zajmować niezmiennie położenie w przestrzeni. Jako całość musi być połączony z podłożem, a poszczególne jego elementy muszą być ze sobą połączone w sposób geometrycznie niezmienny [2].

Liczba potrzebnych połączeń zależy od liczby stopni swobody rozpatrywanego układu, czyli liczby niezależnych parametrów określających położenie tego układu.

Każde położenie punktu materialnego w płaszczyźnie określone jest jednoznacznie przez dwa niezależne parametry (współrzędne x_k, y_k). Punkt w płaszczyźnie ma zatem dwa stopnie swobody (Rys.1.2.a).



Rys.1.2.

Tarcza sztywna w swojej płaszczyźnie ma trzy stopnie swobody, gdyż jej położenie określone jest jednoznacznie przez trzy niezależne parametry (np. współrzędne x_k, y_k oraz kąt φ lub też współrzędne x_k, y_k, y_z – Rys.1.2.b).

Położenie bryły sztywnej w przestrzeni określone jest jednoznacznie przez sześć niezależnych parametrów x_k, y_k, z_k oraz kąty $\varphi_{xy}, \varphi_{xz}, \varphi_{zy}$.

1.2.2. Połączenia prętów i układów prętowych [2]

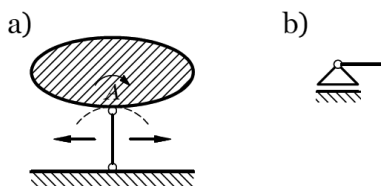
Układ prętowy składa się z tarcz. Każda wyodrębniona tarcza musi być geometrycznie niezmienna i ma trzy stopnie swobody względem innej tarczy lub podłoża (podłoże także może być traktowane jako tarcza sztywna). Więzy (połączenia) – elementy zmniejszające liczbę stopni swobody tarczy lub układu tarcz [2].

Połączenia możemy przedstawić w postaci łączników – prętów prostych zakończonych na obu końcach przegubami (nie uwzględnia się odkształceń tych prętów, uważając je za doskonale sztywne). Pręty łączące

tarczę z podłożem, które zastępują podpory stanowią łączniki zewnętrzne, natomiast pręty łączące ze sobą poszczególne tarcze układu prętowego (zastępujące przeguby) są to łączniki wewnętrzne [2].

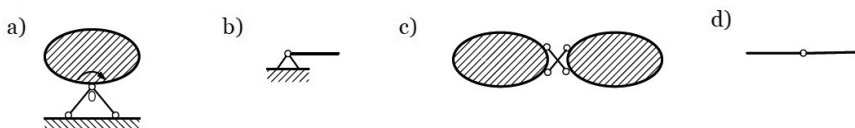
Rodzaje połączeń tarczy z podłożem lub inną tarczą [2]:

- pojedyncze – (1 łącznik) pozbawia układ jednego stopnia swobody – możliwy jest wzajemny obrót łączonych tarcz oraz przemieszczenie prostopadłe do osi łącznika. Połączenie to odpowiada podporze przegubowej przesuwnej (Rys.1.3.);



Rys.1.3.

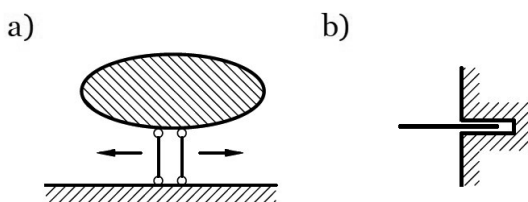
- podwójne (2 łączniki nierównoległe) – pozbawia układ dwóch stopni swobody. Dwa łączniki nierównoległe pozwalają na wzajemny obrót (dokoła punktu przecięcia się osi łączników) łączonych tarcz. Połączenie takie odpowiada podporze przegubowej nieprzesuwnej lub połączeniu przegubowemu jednokrotnemu (Rys1.4.);



Rys.1.4.

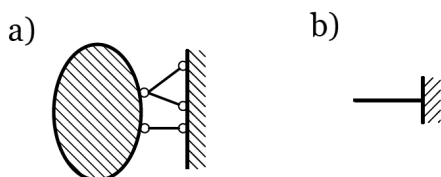
- przegub łączący jednocześnie m tarcz zastępuje $(m - 1)$ przegubów jednokrotnych. Przegub $(m - 1)$ – krotny jest równoznaczny z połączeniem utworzonym przez $2(m - 1)$ łączników i odbiera układowi $2(m - 1)$ stopni swobody;
- podwójne (2 łączniki równoległe) – pozbawia układ dwóch stopni swobody. Dwa równoległe łączniki jednakowej długości umożliwiają przemieszczenie liniowe prostopadłe do osi łączników. Połączenie takie

odpowiada utwierdzeniu z możliwością przesuwu podłużnego, czyli tzw. połączeniu teleskopowemu (Rys.1.5.);



Rys.1.5.

- potrójne (3 łączniki nierównoległe, które nie przecinają się w jednym punkcie) – pozbawia układ trzech stopni swobody. Trzy łączniki nierównoległe i nie przecinające się w jednym punkcie (Rys.1.6.a.) nie pozwalają na żadne przemieszczenia wzajemne łączonych elementów. Połączenie potrójne jest równoznaczne z całkowitym utwierdzeniem (Rys.1.6.).



Rys.1.6.

1.2.3. Geometryczna niezmienność płaskich układów prętowych [2]

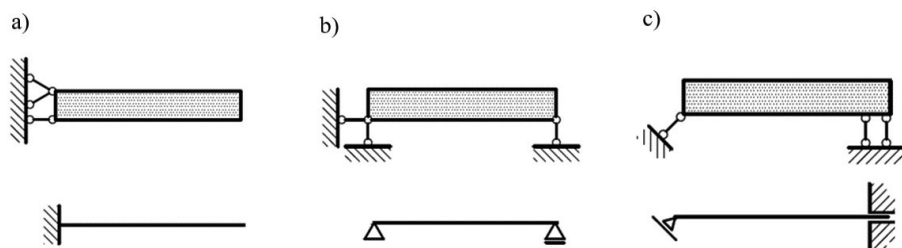
Układ prętowy powinien mieć tyle prętów łączących (łączników) ile jest konieczne dla zapewnienia mu niezmienności geometrycznej. Przy właściwym rozmieszczeniu prętów łączących spełniona jest zależność:

$$3t = r + s \quad (1.1)$$

gdzie: t – liczba tarcz w układzie prętowym (pomijając tarczę podłoża),
 r – liczba prętów podporowych (łączników zewnętrznych) łączących układ z podłożem,
 s – liczba prętów (łączników wewnętrznych) łączących ze sobą poszczególne tarcze układu.

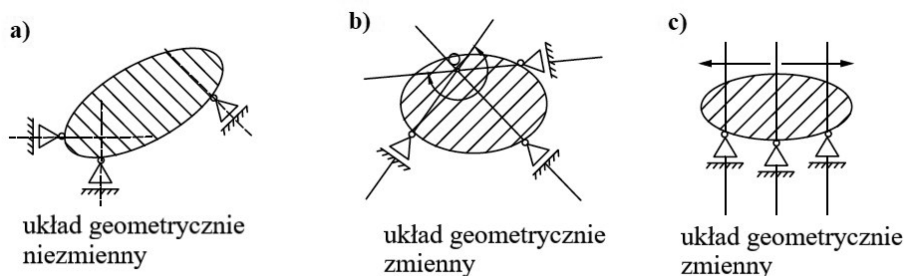
Przegub łączący jednocześnie m tarcz jest przegubem $(m-1)$ krotnym i jest równoznaczny z połączeniem utworzonym przez $2(m-1)$ łączników (odbiera układowi $2(m-1)$ stopni swobody). Stąd, $s = 2(m-1)$.

Aby unieruchomić pojedynczą tarczę należy pozbawić ją trzech stopni swobody. Można to uczynić wprowadzając trzy pręty podporowe (łączniki zewnętrzne) łączące tarczę z podłożem (Rys. 1.7.).



Rys.1.7. Całkowite unieruchomienie tarczy za pomocą trzech łączników

Możliwe są układy, które mimo, że spełniają równanie (1.1) nie są układami geometrycznie niezmiennymi.

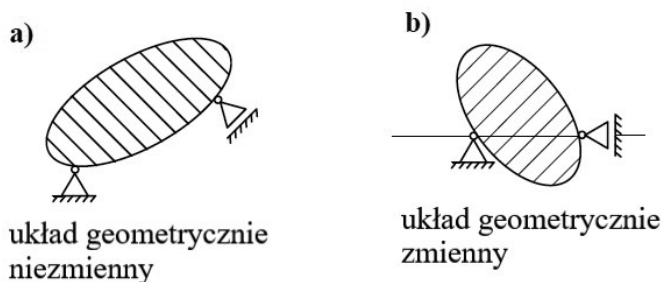


Rys.1.8. Przykłady układu geometrycznie niezmiennego i geometrycznie zmiennego

Połączenie tarczy z podłożem (lub inną tarczą) za pomocą trzech łączników nierównoległych nie jest warunkiem wystarczającym. Warunkiem dostatecznym jest to, że osie łączników nie przecinają się w jednym punkcie (nie powstaje chwilowy środek obrotu). Rysunek 1.8.a przedstawia układ geometrycznie niezmienny natomiast rysunki 1.8.b i 1.8.c przedstawiają układy geometrycznie zmienne.

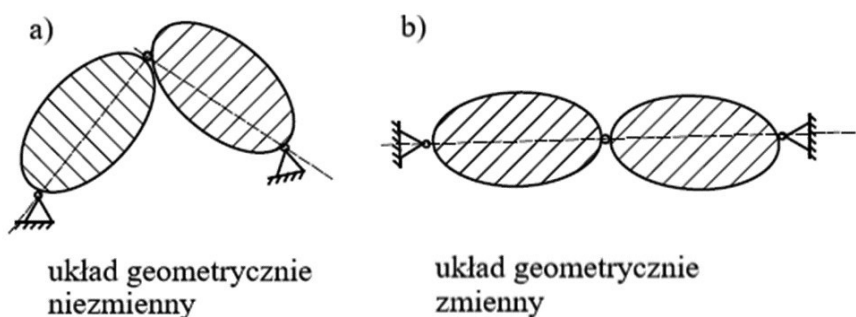
Dla pojedynczej tarczy sztywnej podpartej przegubem rzeczywistym i prętem podporowym warunkiem dostatecznym geometrycznej

niezmienności jest to, aby przegub rzeczywisty nie znajdował się na kierunku pręta podporowego. Rys.1.9.a przedstawia układ geometrycznie niezmienny natomiast Rys.1.9.b przedstawia układ geometrycznie zmienny.



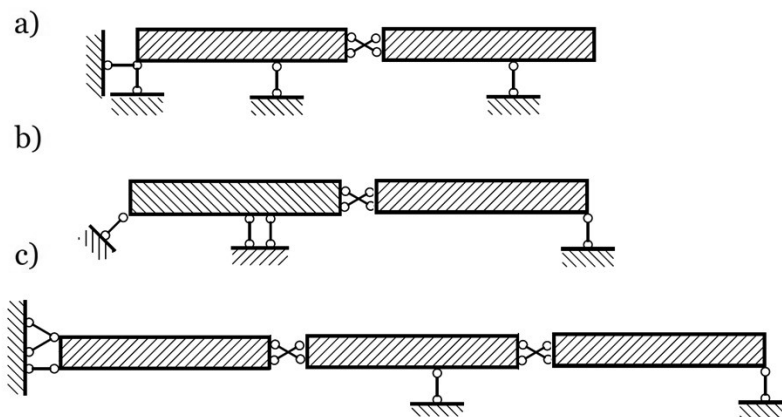
Rys.1.9. Przykłady układu geometrycznie niezmiennego i geometrycznie zmiennego

Często wykorzystywanym układem tarcz sztywnych jest układ trójprzegubowy. Dla takiego układu warunkiem dostatecznym geometrycznej niezmienności jest fakt, że trzy przeguby nie znajdują się na jednej prostej. Rysunek 1.10.a przedstawia układ geometrycznie niezmienny natomiast rysunek 1.10.b przedstawia układ geometrycznie zmienny.



Rys.1.10. Przykłady układu geometrycznie niezmiennego i geometrycznie zmiennego

Aby unieruchomić płaską tarczę należy połączyć ją z podłożem trzema łącznikami, nie przecinającymi się w jednym punkcie i nierównoległymi. Jeśli do takiego układu dołączymy następną tarczę połączoną również trzema łącznikami (z sąsiednią tarczą i podłożem) nie przecinającymi się w jednym punkcie i nierównoległymi, to układ tarcz będzie geometrycznie niezmienny (Rys.1.11).



Rys.1.11. Przykłady układu geometrycznie niezmiennego złożonego z płaskich tarcz

1.2.4. Statyczna wyznaczalność płaskich układów prętowych [2]

Układ tarcz sztywnych jest statycznie wyznaczalny (jest zewnętrznie statycznie wyznaczalny) jeżeli tarcza jest związana z podłożem lub z inną tarczą za pomocą trzech łączników nierównoległych, których osie nie przecinają się w jednym punkcie (liczba składowych reakcji wynosi 3).

Stopień statycznej niewyznaczalności płaskiego układu prętowego możemy zatem wyznaczyć z zależności:

$$n = (r + s) - 3t \quad (1.2)$$

gdzie: n – stopień statycznej niewyznaczalności płaskich układów prętowych,

t – liczba tarcz w układzie prętowym (z pominięciem tarczy podłoża),

r – liczba prętów podporowych (łączników zewnętrznych) łączących układ z podłożem,

s – liczba prętów (łączników wewnętrznych) łączących ze sobą poszczególne tarcze układu, $s=2(m-1)$, gdzie m – liczba tarcz połączonych przegubem.

Jeżeli: $n = 0$ – układ prętowy jest statycznie wyznaczalny,

$n < 0$ – układ prętowy jest geometrycznie zmienny (mechanizm),

$n > 0$ – układ prętowy jest statycznie niewyznaczalny (układ przeszywniony) – ma on więcej połączeń niż to jest konieczne dla zapewnienia jego kinematycznej i statycznej wyznaczalności.

Jeżeli $n=k$ to taki układ prętowy jest k -krotnie statycznie niewyznaczalny. Usuając w układzie przeszywnionym niektóre połączenia obniżamy krotność jego statycznej niewyznaczalności.

Jeśli w układzie występują obszary zamknięte utworzone przez sztywno połączone ze sobą pręty to stopień statycznej niewyznaczalności wyznaczamy z zależności [2]:

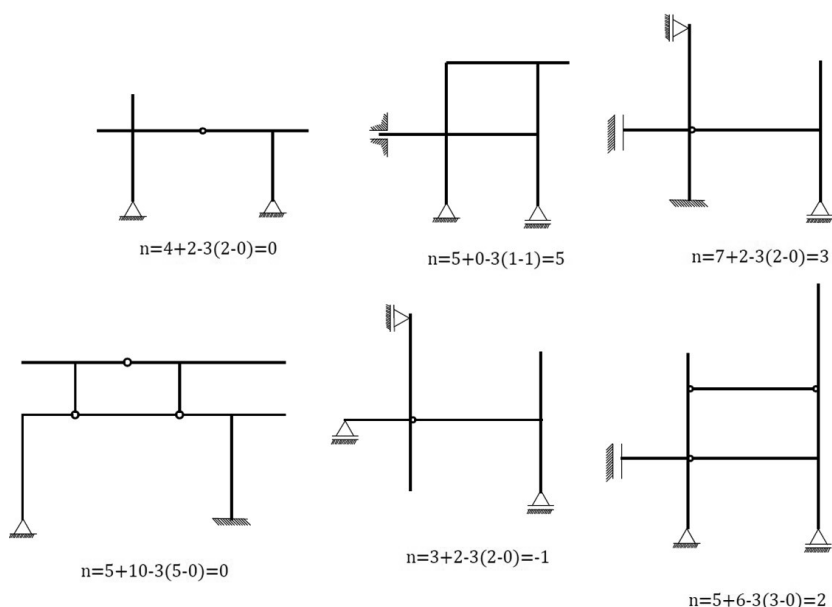
$$n = (r + s) - 3(t - z) \quad (1.3)$$

gdzie: z – liczba obszarów zamkniętych utworzonych przez sztywno połączone ze sobą pręty.

Przykład 1.1.

Dla płaskich układów prętowych przedstawionych na Rys.1.12. określić stopień statycznej niewyznaczalności.

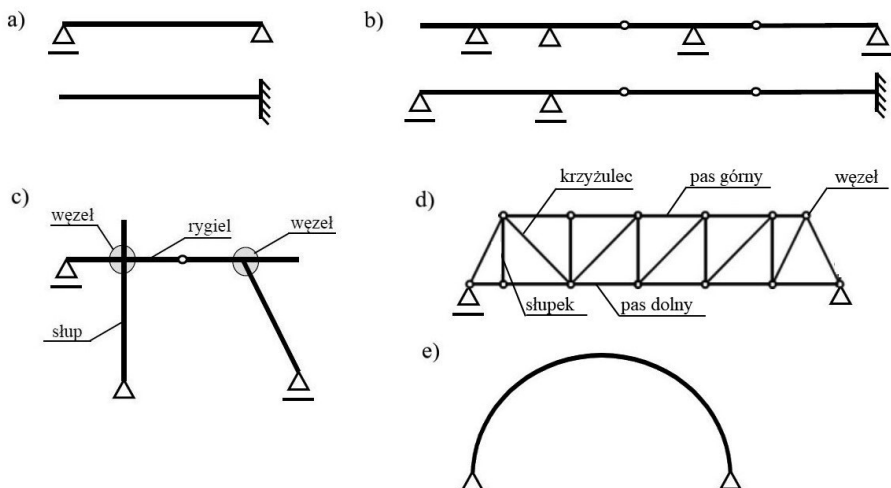
Stopień statycznej niewyznaczalności $n = (r + s) - 3(t - z)$



Rys.1.12.

1.3. Typy płaskich układów prętowych

- belka – układ prętowy składający się z jednego lub wielu prętów, których osie leżą na poziomej prostej, podparty w sposób geometrycznie niezmienny. Jeżeli belka składa się tylko z jednego pręta, to nazywamy ją belką prostą (jednoprzęślową) – Rys.1.13.a. Belkę powstałą poprzez połączenie dwóch lub więcej belek prostych nazywamy belką złożoną (ciągłą, wieloprzęślową) – Rys.1.13.b.;
- rama (ramownica) – układ prętowy złożony z prętów prostych, nie leżących na jednej prostej, podpartych i połączonych w sposób geometrycznie niezmienny; ramę utworzoną z prętów, których osie leżą w jednej płaszczyźnie, nazywamy płaską – Rys.1.13.c.;
- kratownica – układ prętów prostych połączonych przegubami w węzłach mający niezmienną geometrycznie postać – Rys.1.13.d.;
- łuk – układ prętowy złożony z jednego lub wielu prętów zakrzywionych, podpartych i połączonych ze sobą w sposób geometrycznie niezmienny; łuk złożony z zakrzywionych prętów, których osie leżą w jednej płaszczyźnie, nazywamy płaskim – Rys.1.13.e.



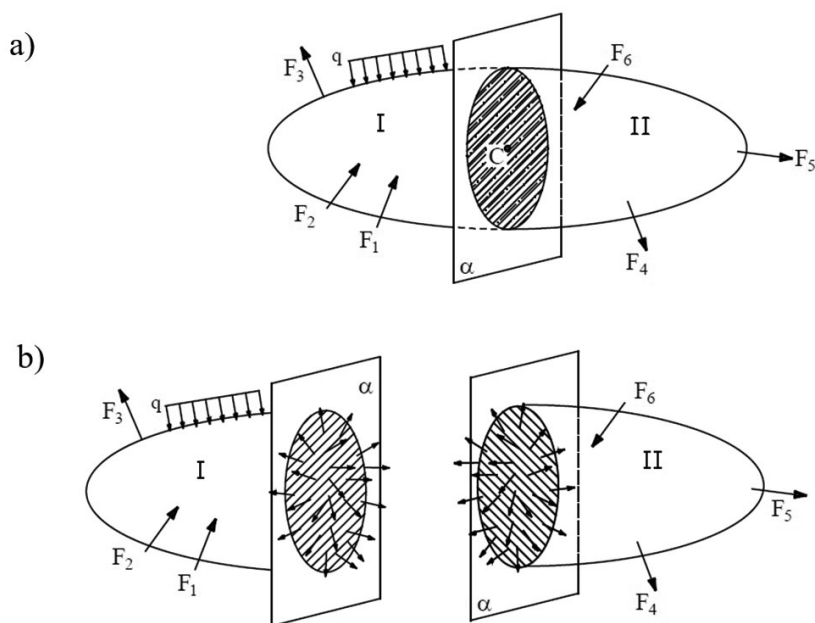
Rys.1.13. Typy płaskich układów prętowych

Rozdział 2

2. Siły wewnętrzne w statycznie wyznaczalnych płaskich układach prętowych

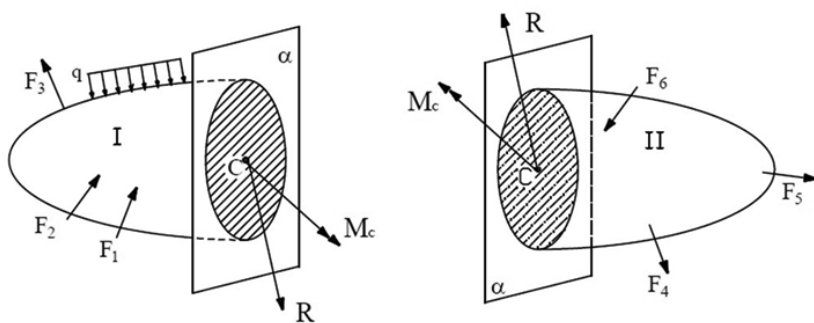
2.1. Definicja sił wewnętrznych [1],[3],[4]

Rozważmy ciało będące w równowadze pod działaniem układu sił zewnętrznych (Rys.2.1.1.a). Pod wpływem przyłożonych obciążeń zewnętrznych ciało zmienia swoje kształty i wymiary ale, dzięki istnieniu sił międzycząsteczkowych, zachowuje ciągłość. Jeżeli przetniemy ciało myślowo przekrojem $\alpha - \alpha$ na dwie części (Rys.2.1.1.b), to na płaszczyźnie przekroju wystąpią siły wzajemnego oddziaływania oddzielonych części (Rys.2.1.1.b).



Rys.2.1.1. Ciało będące w równowadze obciążone siłami zewnętrznymi

Siły te można zredukować do wektora głównego $\vec{R}$ i momentu głównego $\vec{M}_C$ przyjmując za punkt redukcji środek przekroju (punkt C). Oddziaływanie części I na część II zastępujemy wektorami $\vec{R}$ i $\vec{M}_C$ zaczepionymi w punkcie C. Oddziaływanie części II na część I przedstawiono w analogiczny sposób (Rys. 2.1.2.). Na podstawie trzeciego prawa dynamiki Newtona wektory $\vec{R}$ i $\vec{M}_C$ obrazujące oddziaływanie części I na część II oraz części II na część I mają taką samą wartość i ten sam kierunek, lecz przeciwne zwroty. Ponieważ ciało jest w równowadze to i każda z dwóch wyciętych części tego ciała też musi być w równowadze.



Rys.2.1.2.

Z sześciu równań równowagi dla przestrzennego układu sił zapisanych dla jednej z wyciętych części ciała można wyznaczyć wielkości nieznane: trzy składowe momentu głównego i trzy składowe wektora głównego (Rys.2.1.3.). Wielkości te nazywamy siłami wewnętrznymi (siłami przekrojowymi).

Biorąc pod uwagę efekt działania poszczególnych składowych wektora głównego $\vec{R}$ i momentu głównego $\vec{M}_C$ określa się je jako:

N – siła normalna (podłużna),

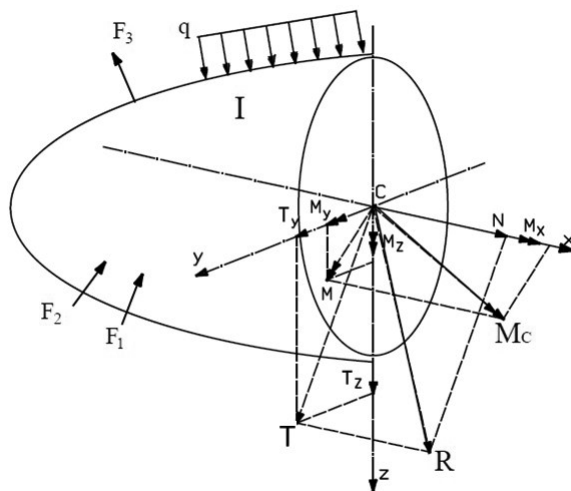
T_y – siła poprzeczna (tnąca) w kierunku osi y ,

T_z – siła poprzeczna (tnąca) w kierunku osi z ,

M_x – moment skręcający,

M_y – moment zginający względem osi y ,

M_z – moment zginający względem osi z .



Rys.2.1.3.

2.2. Siły wewnętrzne w płaskich układach prętowych [3],[4],[5],[6]

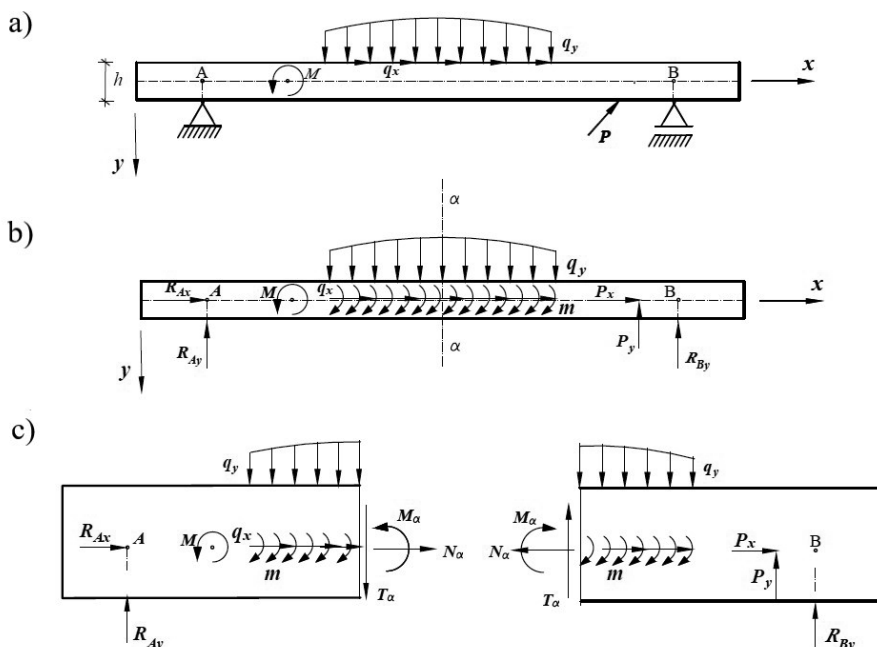
W konstrukcjach prętowych siły wewnętrzne (wektor główny $\vec{R}$ i moment główny $\vec{M}_C$) w przekroju poprzecznym są zredukowane do środka ciężkości pola przekroju poprzecznego, czyli punktu leżącego na osi pręta.

Ponieważ mamy do czynienia z płaskim układem sił, to możemy go zredukować w dowolnym przekroju poprzecznym do trzech sił przekrojowych: składowej równoległej do osi pręta nazywanej siłą podłużną – N , siły prostopadłej do osi pręta nazywanej siłą poprzeczną – T oraz do momentu – M , który z racji efektu działania na pręt, nazywany jest momentem zginającym.

Rozważmy belkę swobodnie podpartą przedstawioną na Rys.2.2.1.a. Wszystkie obciążenia redukujemy do osi ciężkości belki w związku z tym, obciążenie poziome rozłożone w sposób ciągły na górnej krawędzi belki q_x , spowodowało powstanie w osi belki dodatkowego momentu ciągłego $m = q_x \frac{h}{2}$ (Rys.2.2.1.b.).

Przedstawione na Rys.2.2.1.c. zwroty sił wewnętrznych traktujemy, zgodnie z przyjętą umową znakowania jako dodatnie.

Umowa odnośnie znakowania – na Rys.2.2.1.c przedstawiono dodatnie zwroty sił wewnętrznych N_α , T_α i M_α działających odpowiednio na lewą i prawą stronę przekroju α - α .



Rys.2.2.1.[4]

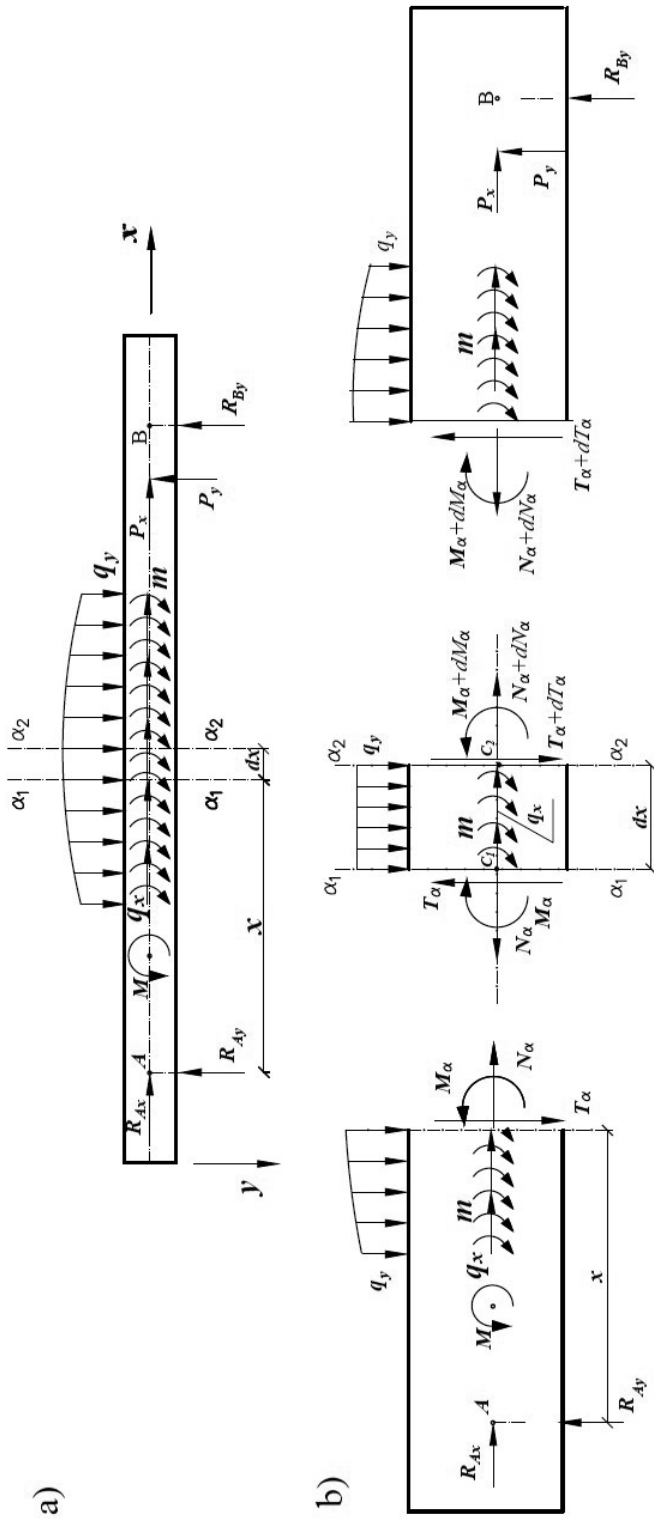
2.2.1. Zależności różniczkowe między siłami wewnętrznymi i obciążeniem zewnętrznym [3]

W celu wyznaczenia zależności różniczkowych występujących między siłami wewnętrznymi i obciążeniem zewnętrznym rozważmy belkę swobodnie podpartą przedstawioną na Rys.2.2.2.a. Z belki tej wycinamy nieskończenie mały element o długości dx przedstawiony na Rys.2.2.2.b. Wewnętrzne siły przekrojowe obrazują wzajemne oddziaływanie wyciętych fragmentów belki.

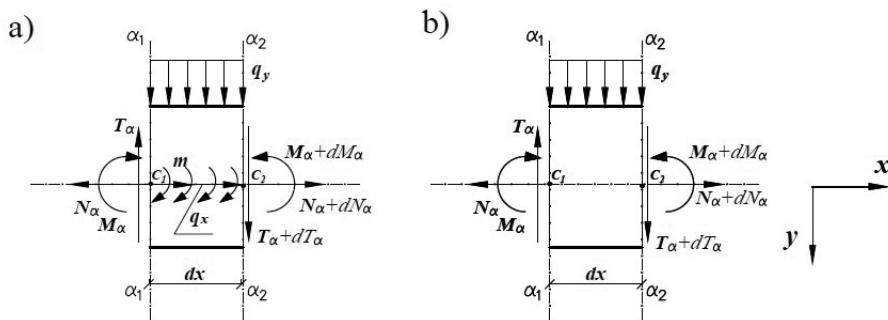
Przedstawione na Rys.2.2.2.b. zwroty sił wewnętrznych traktujemy, zgodnie z przyjętą umową znakowania sił wewnętrznych, jako dodatnie.

Można przyjąć, że dla elementu o długości dx obciążenia zewnętrzne mają wartość stałą. Siły wewnętrzne, podobnie jak obciążenie, są w tym przypadku funkcjami współrzędnej x .

Dla wyciętego elementu o długości dx , przedstawionego na Rys.2.2.3.a. możemy napisać trzy równania równowagi.



Rys.2.2.2.[4]



Rys.2.2.3.

$$\begin{aligned}
 \sum F_{iy} &= 0; -T_\alpha + q_y dx + (T_\alpha + dT_\alpha) = 0 \\
 \sum F_{ix} &= 0; -N_\alpha + q_x dx + (N_\alpha + dN_\alpha) = 0 \\
 \sum M_{(c_2)} &= 0; -M_\alpha - T_\alpha dx - m dx + q_y dx \frac{dx}{2} + (M_\alpha + dM_\alpha) = 0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Z powyższych równań, po pominięciu małych wielkości wyższego rzędu, uzyskujemy różniczkowe zależności między siłami wewnętrznymi i obciążeniem zewnętrznym:

$$\begin{aligned}
 \frac{dT_\alpha}{dx} &= -q_y \\
 \frac{dN_\alpha}{dx} &= -q_x \\
 \frac{dM_\alpha}{dx} &= T_\alpha + m
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

W prętowych elementach konstrukcyjnych, w większości przypadków mamy do czynienia ze stanem obciążenia, w którym $q_x=0$ i $m=0$ (Rys.2.2.3.b), wówczas różniczkowe zależności między siłami wewnętrznymi i obciążeniem zewnętrznym mają postać:

$$\begin{aligned}
 \frac{dT_\alpha}{dx} &= -q_y \\
 \frac{dM_\alpha}{dx} &= T_\alpha \\
 \frac{d^2 M_\alpha}{dx^2} &= \frac{dT_\alpha}{dx} = -q_y
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Z zależności $\frac{dM_\alpha}{dx} = T_\alpha$ można wywnioskować, że:

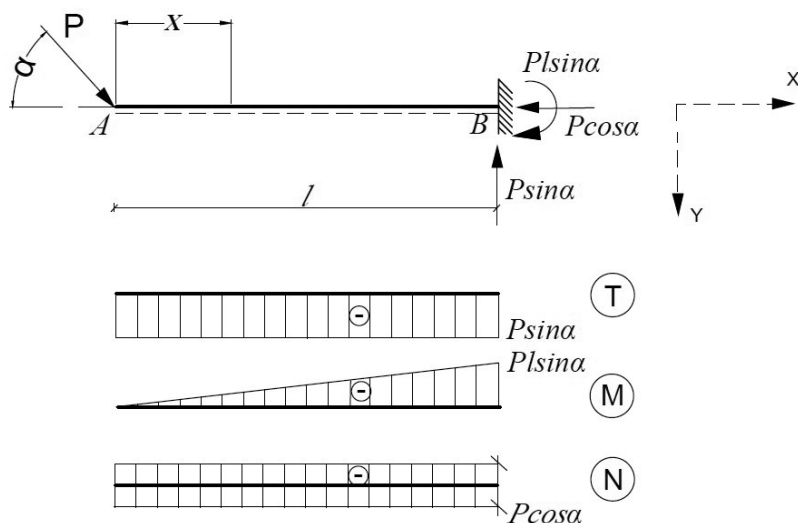
jeżeli równanie sił tnących zeruje się w pewnym punkcie, to moment zginający osiąga w tym punkcie ekstremum (maksimum lub minimum wartości w tym przedziale).

2.3. Belki proste – siły wewnętrzne

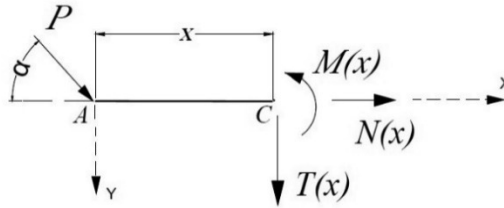
Ponieważ siły przekrojowe (siły wewnętrzne) wyrażają wyężenie w przekroju projektowanego elementu, dla projektanta istotna jest znajomość tych sił w każdym punkcie konstrukcji. W tym celu określa się równania funkcji sił wewnętrznych (momentu zginającego, siły poprzecznej i podłużnej), na podstawie których sporządza się wykresy tych sił. Równania te zapisuje się jako funkcje położenia przekroju w jego własnym układzie lokalnym.

- **Obciążenie siłą skupioną**

a) *belka wspornikowa (Rys.2.3.1.)*



Rys.2.3.1.



Rys.2.3.2.

Równania sił wewnętrznych wyznaczmy jako funkcje położenia w przekroju odległym o x od punktu A w jego własnym układzie lokalnym, pisząc równania równowagi dla wyciętej lewej części belki (Rys.2.3.2.).

Przedział AB: $0 \leq x < l$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad T(x) + P \sin \alpha = 0 \quad \rightarrow \quad T(x) = -P \sin \alpha$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad N(x) + P \cos \alpha = 0 \quad \rightarrow \quad N(x) = -P \cos \alpha$$

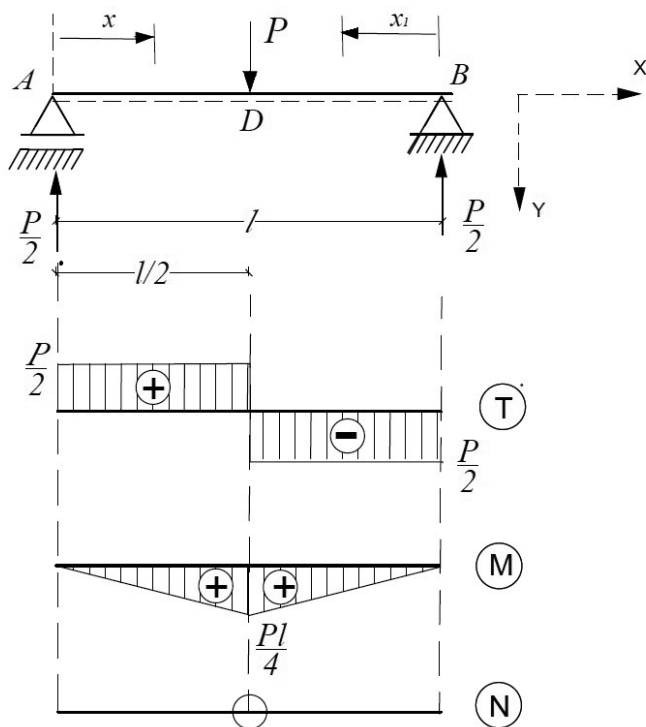
$$\sum M_{(C)} = 0; \quad M(x) + P \sin \alpha \cdot x = 0 \quad \rightarrow \quad M(x) = -P x \sin \alpha$$

Korzystając z równania momentu zginającego możemy wyznaczyć jego wartości na końcach belki AB:

$$\text{dla } x = 0 \quad M(x) = 0 \quad \text{a dla } x = l \quad M(x) = -Pl \sin \alpha$$

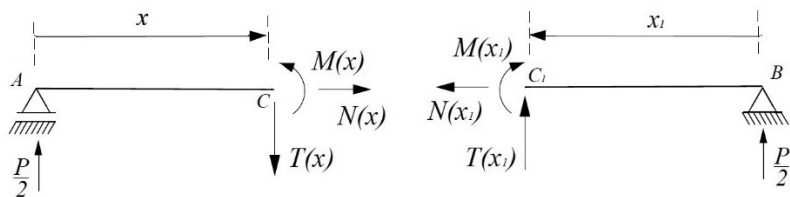
Ostateczne wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys.2.3.1.

b) belka swobodnie podparta (Rys.2.3.3.)



Rys.2.3.3.

Równania sił przekrojowych jako funkcje położenia przekroju należy wyznaczyć w dwóch przedziałach np.: w przekroju odległym o x od punktu A, pisząc równania równowagi dla wyciętej lewej części belki oraz w przekroju odległym o x_i od punktu B pisząc równania równowagi dla wyciętej prawej części belki (Rys.2.3.4.).



Rys.2.3.4.

Przedział AD: $0 \leq x < \frac{l}{2}$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad T(x) - \frac{P}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad T(x) = \frac{P}{2}$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad N(x) = 0$$

$$\sum M_{(C)} = 0; \quad M(x) - \frac{P}{2} \cdot x = 0 \quad \rightarrow \quad M(x) = \frac{P}{2}x$$

$$\text{dla } x = 0 \quad M(x) = 0 \quad \text{a dla } x = \frac{l}{2} \quad M(x) = \frac{Pl}{4}$$

Przedział BD: $0 \leq x_1 < \frac{l}{2}$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -T(x_1) - \frac{P}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad T(x_1) = -\frac{P}{2}$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad N(x_1) = 0$$

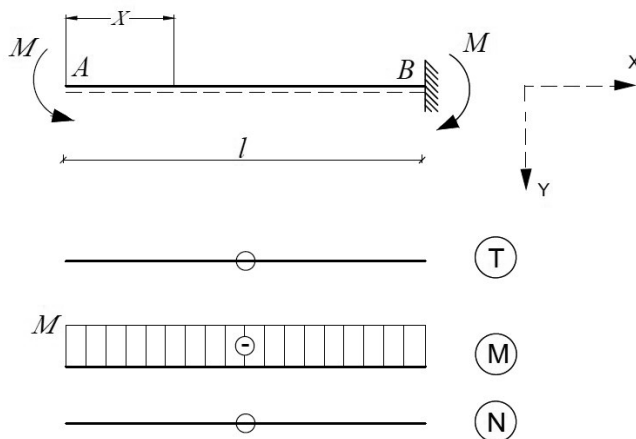
$$\sum M_{(C_1)} = 0; \quad -M(x_1) + \frac{P}{2} \cdot x_1 = 0 \quad \rightarrow \quad M(x_1) = \frac{P}{2}x_1$$

$$\text{dla } x_1 = 0 \quad M(x_1) = 0 \quad \text{a dla } x_1 = \frac{l}{2} \quad M(x_1) = \frac{Pl}{4}$$

Ostateczne wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys.2.3.3.

- **Obciążenie momentem skupionym**

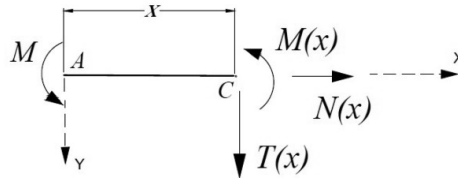
a) *belka wspornikowa* (Rys.2.3.5.)



Rys.2.3.5.

Przedział AB: $0 \leq x < l$

Równania sił wewnętrznych wyznaczmy jako funkcje położenia w przekroju odległym o x od punktu A (Rys.2.3.5.).



Rys.2.3.6.

Równania równowagi dla wyciętej lewej części belki (Rys.2.3.6.) mają postać:

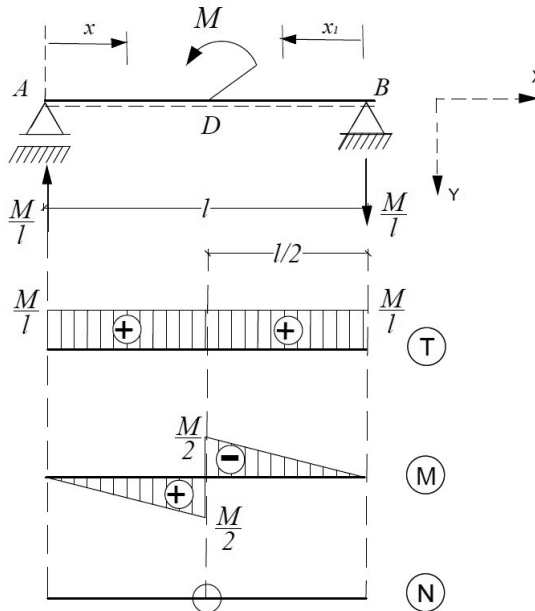
$$\sum F_{iy} = 0; \quad T(x) = 0$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad N(x) = 0$$

$$\sum M_{(C)} = 0; \quad M(x) + M = 0 \quad \rightarrow \quad M(x) = -M$$

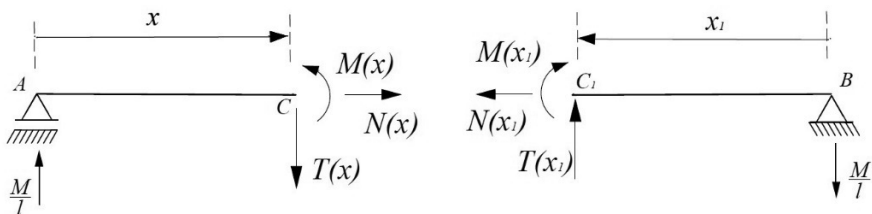
Ostateczne wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys.2.3.5.

b) belka swobodnie podparta (Rys.2.3.7.)



Rys.2.3.7.

Równania sił przekrojowych jako funkcje położenia przekroju należy wyznaczyć w dwóch przedziałach np.: w przekroju odległym o x od punktu A, pisząc równania równowagi dla wyciętej lewej części belki oraz w przekroju odległym o x_1 od punktu B pisząc równania równowagi dla wyciętej prawej części belki (Rys.2.3.8.).



Rys.2.3.8.

Przedział AD: $0 \leq x < \frac{l}{2}$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad T(x) - \frac{M}{l} = 0 \quad \rightarrow \quad T(x) = \frac{M}{l}$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad N(x) = 0$$

$$\sum M_{(C)} = 0; \quad M(x) - \frac{M}{l} \cdot x = 0 \quad \rightarrow \quad M(x) = \frac{M}{l} x$$

$$\text{dla } x = 0 \quad M(x) = 0 \quad \text{a dla } x = \frac{l}{2} \quad M(x) = \frac{M}{2}$$

Przedział BD: $0 \leq x_1 < \frac{l}{2}$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -T(x_1) + \frac{M}{l} = 0 \quad \rightarrow \quad T(x_1) = \frac{M}{l}$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad N(x_1) = 0$$

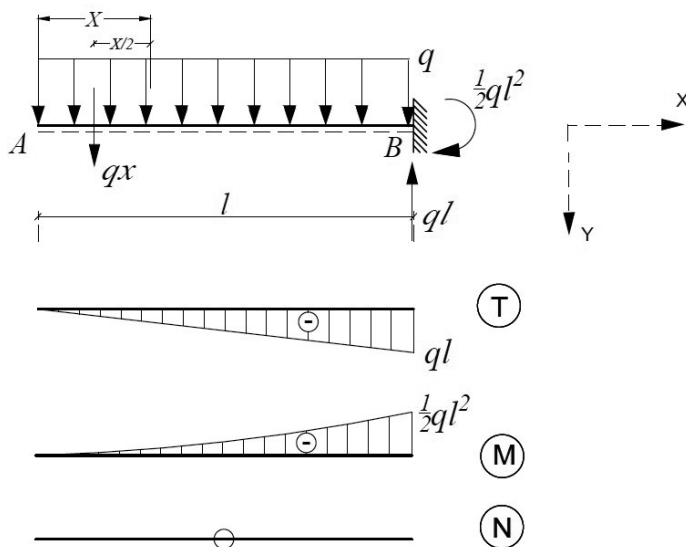
$$\sum M_{(C_1)} = 0; \quad -M(x_1) - \frac{M}{l} \cdot x_1 = 0 \quad \rightarrow \quad M(x_1) = -\frac{M}{l} x_1$$

$$\text{dla } x_1 = 0 \quad M(x_1) = 0 \quad \text{a dla } x_1 = \frac{l}{2} \quad M(x_1) = -\frac{M}{2}$$

Ostateczne wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys.2.3.7.

- **Obciążenie ciągle równomiernie rozłożone o intensywności q**

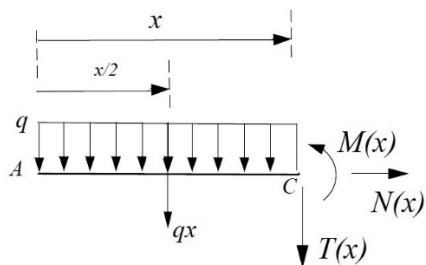
a) belka wspornikowa (Rys.2.3.9.)



Rys.2.3.9.

Przedział AB: $0 \leq x < l$

Równania sił wewnętrznych wyznaczymy jako funkcje położenia w przekroju odległym o x od punktu A. pisząc równania równowagi dla wyciętej lewej części belki (Rys.2.3.10.).



Rys.2.3.10.

Równania równowagi dla wyciętej lewej części belki (Rys.2.3.10.) mają postać:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad T(x) + qx = 0 \rightarrow T(x) = -qx$$

$$\text{dla } x = 0 \quad T(x) = 0; \quad x = l \quad T(x) = -ql$$

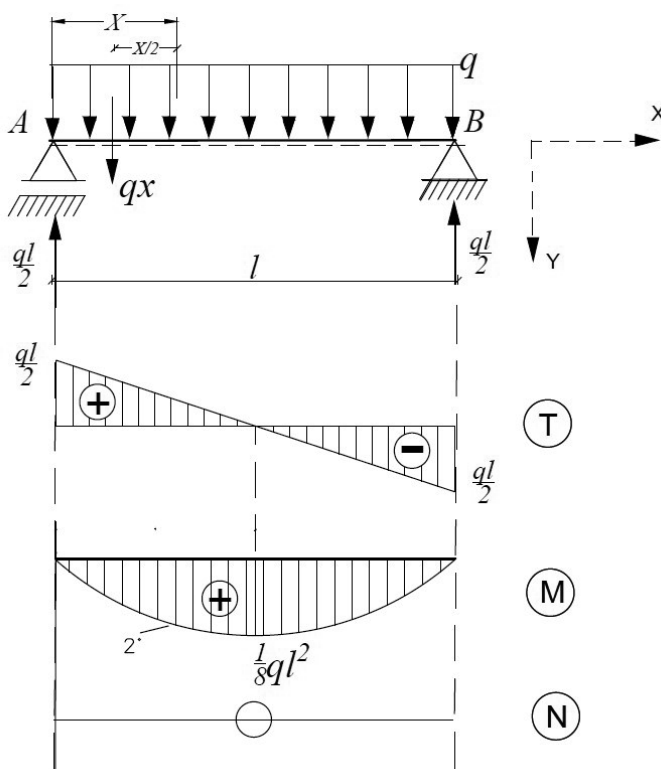
$$\sum F_{ix} = 0; \quad N(x) = 0$$

$$\sum M_{(c)} = 0; \quad M(x) + qx \cdot \frac{x}{2} = 0 \rightarrow M(x) = -\frac{qx^2}{2}$$

$$\text{dla } x = 0 \quad M(x) = 0; \quad x = \frac{l}{2} \quad M(x) = -\frac{ql^2}{8}; \quad x = l \quad M(x) = -\frac{ql^2}{2}$$

Ostateczne wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys.2.3.9.

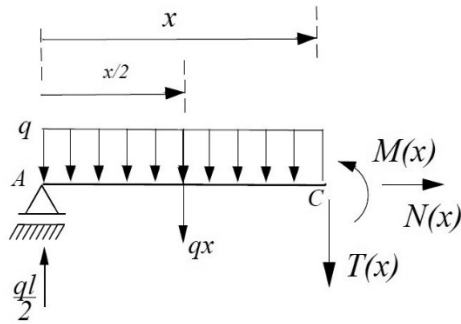
b) belka swobodnie podparta (Rys.2.3.11.)



Rys.2.3.11.

Przedział AB: $0 \leq x < l$

Równania sił przekrojowych wyznaczmy jako funkcje położenia w przekroju odległym o x od punktu A w jego własnym układzie lokalnym, pisząc równania równowagi dla wyciętej lewej części belki (Rys.2.3.12.).



Rys.2.3.12.

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -\frac{ql}{2} + qx + T(x) = 0 \quad \rightarrow \quad T(x) = \frac{ql}{2} - qx$$

$$\text{dla } x = 0 \quad T(x) = \frac{ql}{2}; \quad x = l \quad T(x) = -\frac{ql}{2}$$

$$T(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{ql}{2} - qx = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{l}{2}$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad N(x) = 0$$

$$\sum M_{(C)} = 0; \quad M(x) + qx \cdot \frac{x}{2} - \frac{ql}{2}x = 0 \quad \rightarrow \quad M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

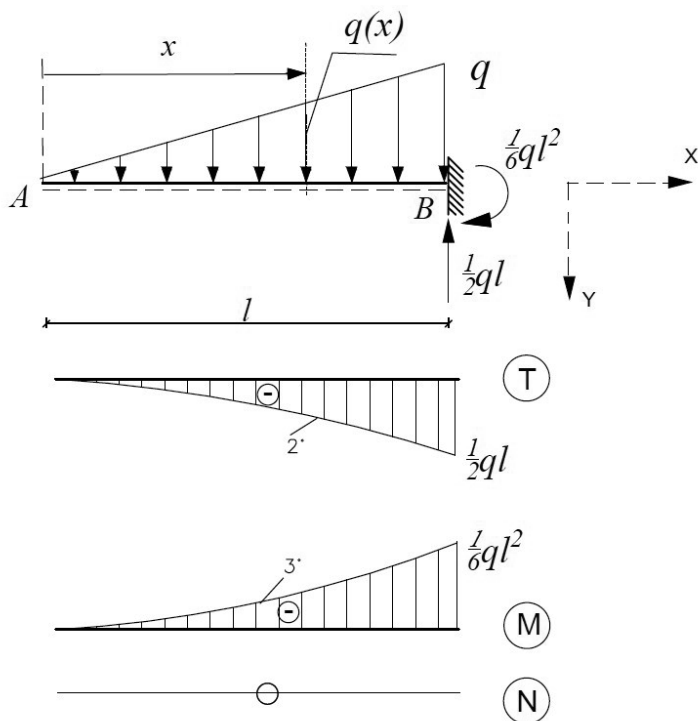
$$\text{dla } x = 0 \quad M(x) = 0; \quad x = l \quad M(x) = 0;$$

$$x = \frac{l}{2} \quad M(x) = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = \frac{ql^2}{8}$$

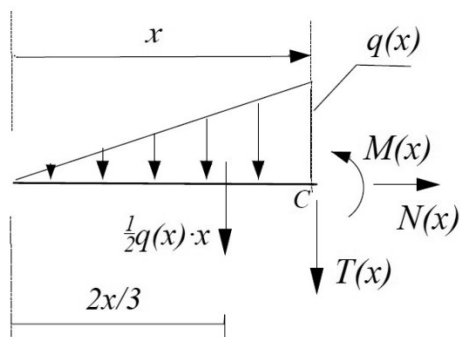
Ostateczne wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys.2.3.11.

- **Obciążenie zmienne liniowo**

a) *belka wspornikowa* (Rys.2.3.13)



Rys.2.3.13.



Rys.2.3.14.

Przedział AB: $0 \leq x < l$

Równania sił wewnętrznych wyznaczmy jako funkcje położenia w przekroju odległym o x od punktu A (Rys.2.3.14.).

$$\sum F_{iy} = 0; \quad T(x) + \frac{1}{2}q(x)x = 0 \quad \rightarrow \quad T(x) = -\frac{1}{2}q(x)x$$

ponieważ

$$\frac{q}{l} = \frac{q(x)}{x} \quad \rightarrow \quad q(x) = \frac{qx}{l}$$

$$T(x) = -\frac{1}{2}q(x)x = -\frac{1}{2}\frac{qx}{l}x = -\frac{1}{2}\frac{qx^2}{l}$$

$$\text{dla } x = 0 \quad T(x) = 0; \quad x = \frac{l}{2} \quad T(x) = -\frac{1}{8}ql; \quad x = l \quad T(x) = -\frac{1}{2}ql$$

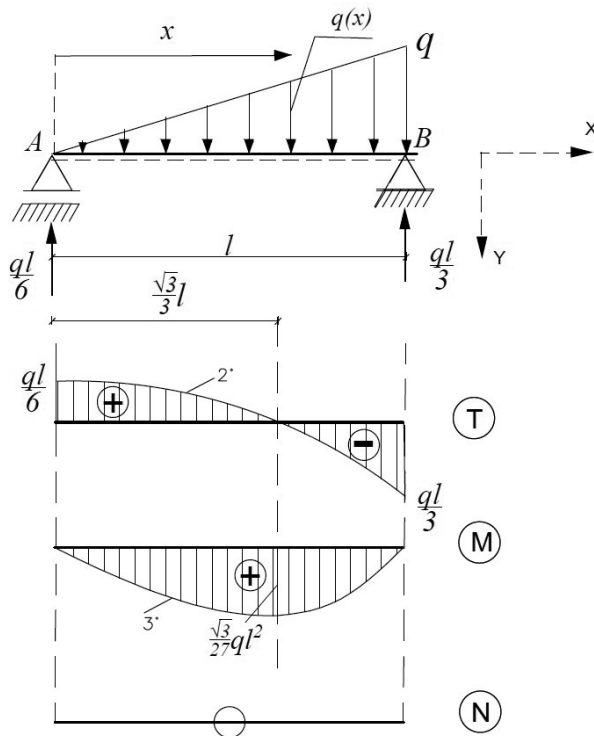
$$\sum F_{ix} = 0; \quad N(x) = 0$$

$$\sum M_{(C)} = 0; \quad M(x) + \frac{1}{2}q(x)x \cdot \frac{x}{3} = 0 \quad \rightarrow \quad M(x) = -\frac{1}{2}\frac{qx}{l}x \cdot \frac{x}{3} = -\frac{qx^3}{6l}$$

$$\text{dla } x = 0 \quad M(x) = 0; \quad x = \frac{l}{2} \quad M(x) = -\frac{ql^2}{48}; \quad x = l \quad M(x) = -\frac{ql^2}{6}$$

Ostateczne wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys.2.3.13.

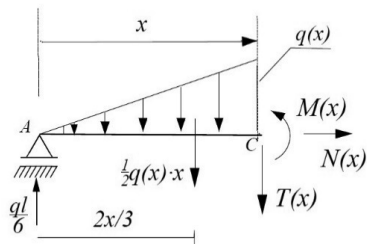
b) belka swobodnie podparta (Rys.2.3.15.)



Rys.2.3.15.

Przedział AB: $0 \leq x < l$

Równania sił przekrojowych wyznaczmy jako funkcje położenia w przekroju odległym o x od punktu A (Rys.2.3.16.).



Rys.2.3.16.

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -\frac{ql}{6} + \frac{1}{2}q(x)x + T(x) = 0 \quad \rightarrow \quad T(x) = \frac{ql}{6} - \frac{1}{2}q(x)x$$

ponieważ

$$\frac{q}{l} = \frac{q(x)}{x} \quad \rightarrow \quad q(x) = \frac{qx}{l}$$

$$T(x) = \frac{ql}{6} - \frac{1}{2}q(x)x = \frac{ql}{6} - \frac{1}{2}\frac{qx}{l}x = \frac{ql}{6} - \frac{1}{2}\frac{qx^2}{l}$$

$$\text{dla } x = 0 \quad T(x) = \frac{1}{6}ql;$$

$$x = \frac{l}{2} \quad T(x) = +\frac{1}{24}ql;$$

$$x = l \quad T(x) = -\frac{1}{3}ql;$$

$$T(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{ql}{6} - \frac{1}{2}\frac{qx^2}{l} = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}l}{3}$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad N(x) = 0$$

$$\sum M_{(C)} = 0; \quad M(x) - \frac{ql}{6}x + \frac{1}{2}q(x)x \cdot \frac{x}{3} = 0 \quad \rightarrow$$

$$M(x) = \frac{ql}{6}x - \frac{1}{2}\frac{qx}{l}x \cdot \frac{x}{3} = \frac{ql}{6}x - \frac{qx^3}{6l}$$

$$\text{dla } x = 0 \quad M(x) = 0;$$

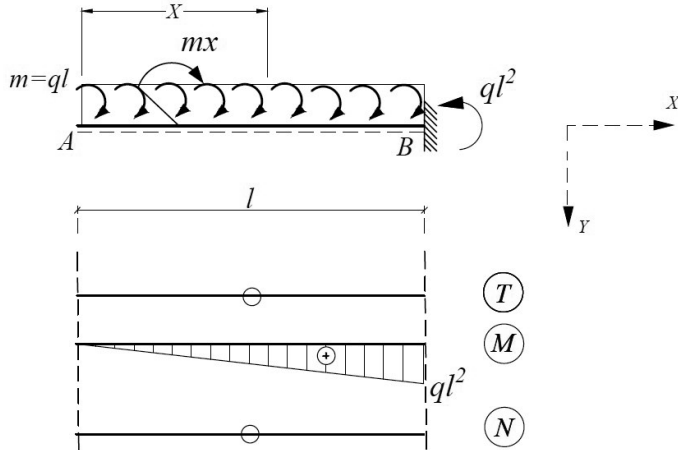
$$x = l \quad M(x) = 0;$$

$$x = \frac{\sqrt{3}l}{3} \quad M(x) = \frac{\sqrt{3}ql^2}{27}.$$

Ostateczne wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys.2.3.15.

- **Obciążenie ciągle momentem o intensywności m**

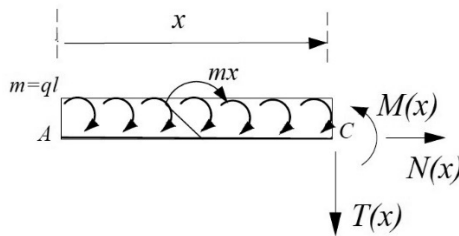
a) *belka wspornikowa* (Rys.2.3.17).



Rys.2.3.17.

Przedział AB: $0 \leq x < l$

Równania sił przekrojowych wyznaczymy jako funkcje położenia w przekroju odległym o x od punktu A (Rys.2.3.18.).



Rys.2.3.18.

$$\sum F_{iy} = 0; \quad T(x) = 0$$

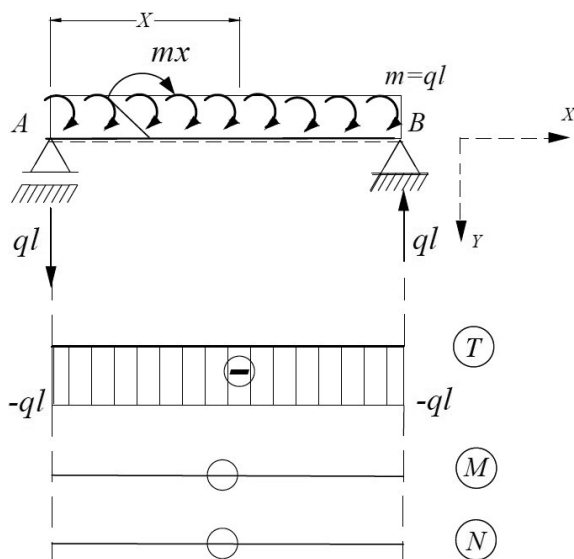
$$\sum F_{ix} = 0; \quad N(x) = 0$$

$$\sum M_{(C)} = 0; \quad M(x) - mx = 0 \quad \rightarrow \quad M(x) = mx = qlx$$

$$\text{dla } x = 0 \quad M(x) = 0; \quad x = l \quad M(x) = ql^2$$

Ostateczne wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys.2.3.17.

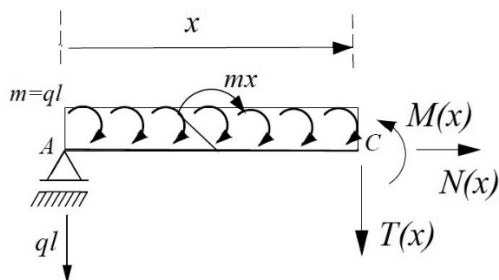
b) belka swobodnie podparta (Rys.2.3.19.)



Rys.2.3.19.

Przedział AB: $0 \leq x < l$

Równania sił wewnętrznych wyznaczmy jako funkcje położenia przekroju odległym o x od punktu A, pisząc równania równowagi dla wyciętej lewej części belki (Rys.2.3.20.).



Rys.2.3.20.

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -ql - T(x) = 0 \quad \rightarrow \quad T(x) = -ql$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad N(x) = 0$$

$$\sum M_{(C)} = 0; \quad M(x) - mx + qlx = 0 \quad \rightarrow \quad M(x) = qlx - qlx = 0$$

Ostateczne wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys.2.3.19.

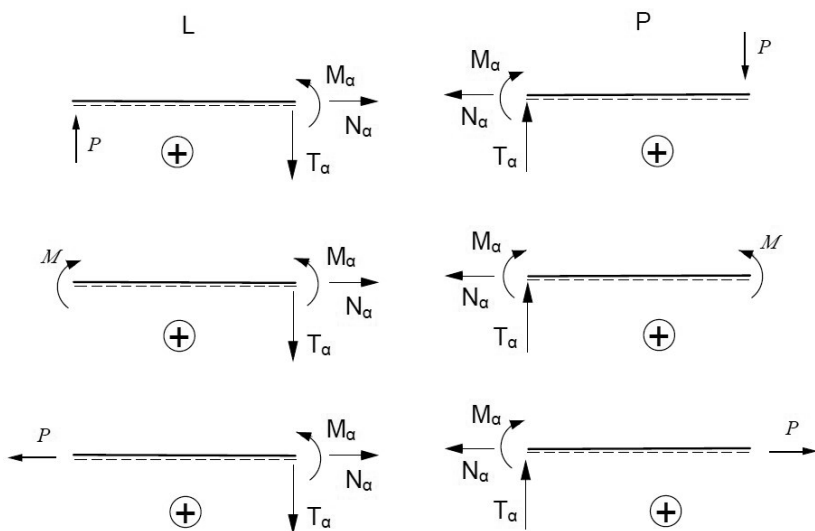
Podsumowanie

Powyższe analizy rozkładu sił wewnętrznych od zadanego obciążenia pozwalają na stwierdzenie że:

- wartość siły podłużnej (normalnej) N_α w danym przekroju α jest równa sumie algebraicznej wszystkich sił leżących po jednej stronie analizowanego przekroju zrzutowanych na kierunek normalny do przekroju,
- wartość siły poprzecznej (tnącej) T_α w danym przekroju α jest równa sumie algebraicznej wszystkich sił leżących po jednej stronie analizowanego przekroju zrzutowanych kierunku tego przekroju,
- wartość momentu zginającego M_α w danym przekroju α jest równa sumie algebraicznej momentów od wszystkich sił leżących po jednej stronie analizowanego przekroju wyznaczonych względem środka ciężkości tego przekroju.

Siły wewnętrzne – konwencja znaków (Rys.2.3.21.)

- siła normalna (podłużna) – siła rozciągająca pręt jest dodatnia,
- siła poprzeczna (tnąca) – siła powodowana przez obciążenie znajdujące się po lewej stronie przekroju i działające do góry lub znajdujące się po prawej stronie przekroju i działające do dołu jest dodatnia,
- moment zginający – moment rozciągający włókna dolne jest dodatni.



Rys.2.3.21.

Uwagi odnośnie sporządzania wykresów sił wewnętrznych:

a) Wykresy sił tnących:

- rzędne dodatnie wykresów sił tnących odklada się nad osią (po stronie przeciwnej niż spody) wpisując znak,
- jeżeli w przedziale nie ma obciążenia ciągłego poprzecznego to wykres sił tnących jest stały, równoległy do osi pręta,
- jeżeli w przedziale jest moment skupiony przyłożony w danym punkcie to obciążenie takie nie wpływa na kształt wykresu sił tnących,
- jeżeli w punkcie przyłożona siła skupiona prostopadła do osi pręta, na wykresie sił tnących pojawia się w tym punkcie skok o wartość działającej siły,
- jeżeli w przedziale działa obciążenie ciągłe o stałej wartości to wykres sił poprzecznych na tym odcinku jest zmienny liniowo a całkowita zmiana ma wartość wypadkowej tego obciążenia,
- jeżeli w przedziale działa obciążenie ciągłe zmienne linowo to wykres sił poprzecznych na tym odcinku zmienia się parabolicznie a całkowita zmiana ma wartość wypadkowej tego obciążenia,

- jeżeli równanie sił tnących zeruje się w przedziale (siła tnąca zmienia znak), to wykres momentów osiąga ekstremum (maksimum lub minimum) w tym punkcie.

b) Wykresy momentów zginających:

- rzędne dodatnie wykresu momentów zginających odklada się pod osią (po stronie spodów);
- wykresy momentów zginających nie muszą być znakowane, jednakże należy je wykonać po stronie włókien rozciąganych,
- jeżeli w przedziale jest moment skupiony przyłożony punktowo to jest to jedyna sytuacja, w której na wykresie momentów zginających pojawia się skok o wartość tego momentu,
- jeżeli w danym punkcie przyłożona jest siła skupiona prostopadła do osi pręta, wykres momentów jest prostą rosnącą lub malejącą zależnie od znaku siły tnącej (na wykresie momentów w miejscu przyłożenia siły zawsze pojawia się załamanie),
- jeżeli w przedziale działa obciążenie ciągle o stałej wartości to wykres momentów na tym odcinku ma kształt paraboliczny i jest „wybrzuszony zgodnie z działaniem obciążenia”,
- jeżeli w przedziale działa obciążenie ciągle zmienne liniowo to wykres momentów na tym odcinku ma kształt krzywej trzeciego stopnia „wybrzuszony zgodnie z działaniem obciążenia”,
- jeżeli równanie sił tnących zeruje się w przedziale (siła tnąca zmienia znak), to wykres momentów osiąga ekstremum (maksimum lub minimum) w tym punkcie.

c) Wykresy sił podłużnych:

- wykresy sił podłużnych rysujemy zazwyczaj symetrycznie względem osi ze znakiem (w niektórych pozycjach literatury dodatnie wykresy sił normalnych odklada się nad osią, a ujemne pod osią, wpisując znak).

Tok postępowania przy sporządzaniu wykresów sił wewnętrznych w płaskich układach prętowych:

- wyznaczenie stopnia statycznej niewyznaczalności n (dla konstrukcji statycznie wyznaczalnych $n=0$),
- obliczenie reakcji podpór,

- określenie przedziałów zmienności sił wewnętrznych,
- napisanie równań sił wewnętrznych w poszczególnych przedziałach,
- określenie wartości sił wewnętrznych w miejscach charakterystycznych (początek i koniec przedziałów, miejsca ekstremów),
- sporządzenie wykresów sił wewnętrznych.

2.3.1. Przykłady obliczeniowe – belki proste

Przykład 2.3.1.

Dla belki przedstawionej na Rys.2.3.22. sporządzić wykresy sił wewnętrznych.

1. Stopień statycznej niewyznaczalności $n=0$,
2. Obliczenie reakcji:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{Ay} + R_{By} + 4ql \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} - 4ql \cos \alpha = 0$$

$$\sum M_{(A)} = 0; \quad R_{By} \cdot 2l - ql^2 + 4ql \sin \alpha \cdot 4l = 0$$

stąd $R_{Ax} = 4ql \cos \alpha = 2\sqrt{3}ql$, $R_{Ay} = \frac{3}{2}ql$, $R_{By} = -\frac{7}{2}ql$

3. Równania sił wewnętrznych w poszczególnych przedziałach:

Przedział AB $0 \leq x_1 < 2l$

$$T(x_1) = \frac{3}{2}ql$$

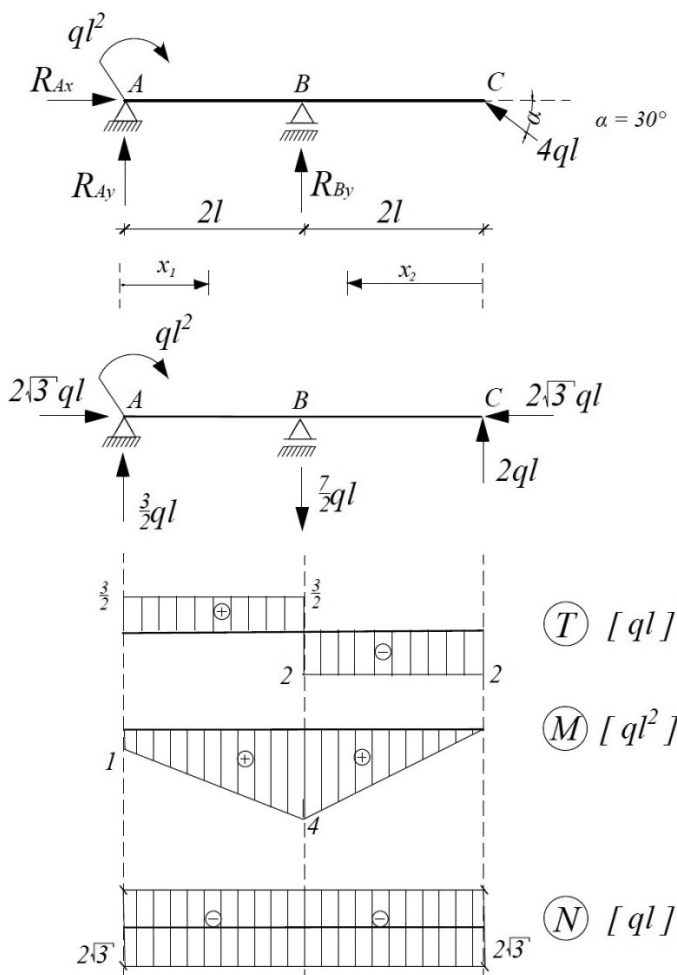
$$M(x_1) = \frac{3}{2}ql \cdot x_1 + ql^2$$

$$M(x_1 = 0) = ql^2$$

$$M(x_1 = 2l) = \frac{3}{2}ql \cdot 2l + ql^2 = 4ql^2$$

$$N(x_1) = -2\sqrt{3}ql$$

Z powyższych równań wynika, że siła tnąca w badanym przedziale ma stałą wartość ($\frac{3}{2}ql$) natomiast moment zmienia się liniowo od wartości ql^2 do $4ql^2$.



Rys.2.3.22.

Przedział CB $0 \leq x_2 < 2l$

$$T(x_2) = -2ql$$

$$M(x_2) = 2ql \cdot x_2$$

$$M(x_2 = 0) = 0 \quad M(x_2 = 2l) = 2ql \cdot 2l = 4ql^2$$

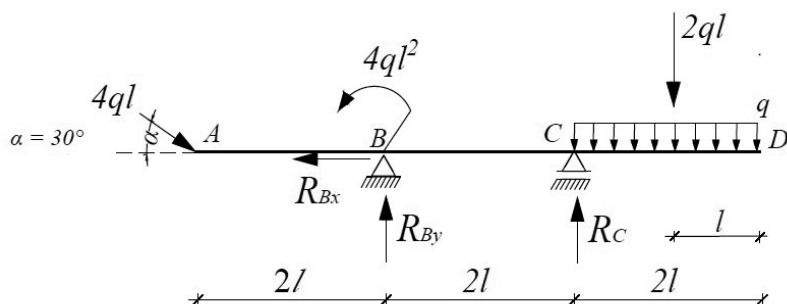
$$N(x_2) = -2\sqrt{3}ql$$

W przedziale tym siła tnąca ma stałą wartość $(-2ql)$ natomiast moment zmienia się liniowo od 0 do $4ql^2$.

Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys. 2.3.22.

Przykład 2.3.2.

Dla belki przedstawionej na rys.2.3.23. sporządzić wykresy sił wewnętrznych.



Rys.2.3.23.

1. Stopień statycznej niewyznaczalności $n=0$,

2. Obliczenie reakcji:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{By} + R_C - 4ql \sin \alpha - 2ql = 0$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -R_{Bx} + 4ql \cos \alpha = 0$$

$$\sum M_{(C)} = 0; \quad -R_{By} \cdot 2l + 4ql^2 + 4ql \sin \alpha \cdot 4l - 2ql \cdot l = 0$$

stąd $R_{Bx} = 4ql \cos \alpha = 2\sqrt{3}ql$, $R_C = -ql$, $R_{By} = 5ql$.

3. Równania sił wewnętrznych w poszczególnych przedziałach (Rys.2.3.24):

Przedział AB $0 \leq x_1 < 2l$ (Rys.2.3.24)

$$T(x_1) = -2ql$$

$$M(x_1) = -2ql \cdot x_1$$

$$M(x_1 = 0) = 0 \quad M(x_1 = 2l) = -2ql \cdot 2l = -4ql^2$$

$$N(x_1) = -2\sqrt{3}ql$$

Siła tnąca w badanym przedziale ma stałą wartość $(-2ql)$ natomiast moment zmienia się liniowo od wartości 0 do $-4ql^2$. Siła podłużna jest ściskająca i wynosi $-2\sqrt{3}ql$.

Przedział BC $0 \leq x_2 < 2l$ (Rys.2.3.24)

$$T(x_2) = -2ql + 5ql = 3ql$$

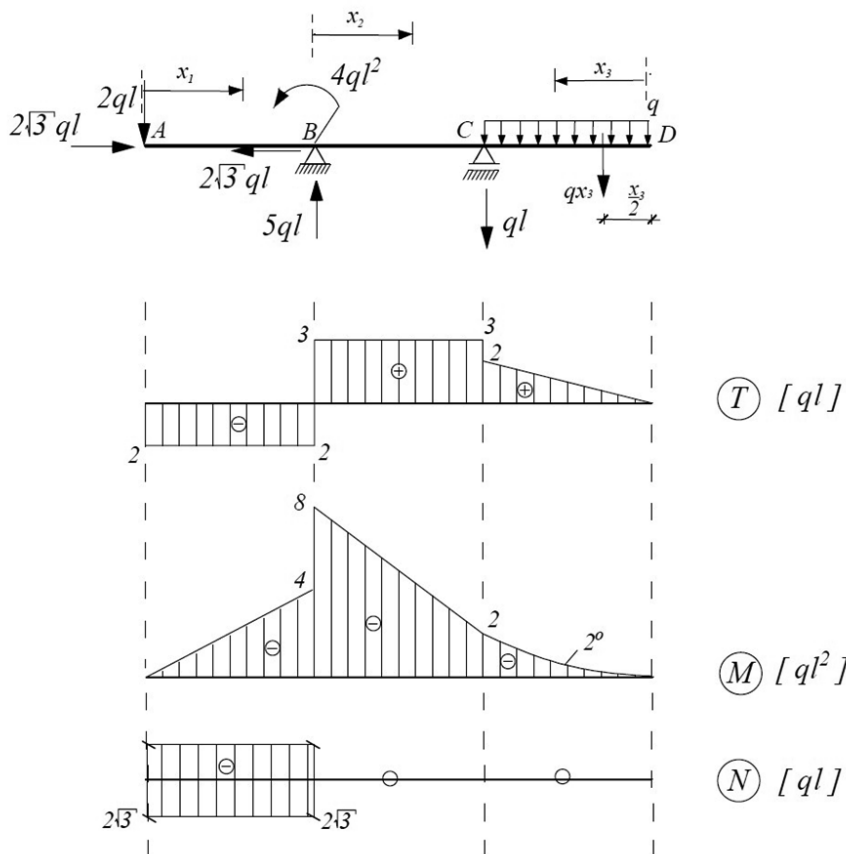
$$M(x_2) = -2ql \cdot (2l + x_2) + 5ql \cdot x_2 - 4ql^2$$

$$M(x_2 = 0) = -8ql^2$$

$$M(x_2 = 2l) = -2ql \cdot (2l + 2l) + 5ql \cdot 2l - 4ql^2 = -2ql^2$$

$$N(x_2) = -2\sqrt{3}ql + 2\sqrt{3}l = 0$$

W przedziale tym siła tnąca ma stałą wartość ($3ql$) natomiast moment zmienia się liniowo od $-8ql^2$ do $-2ql^2$. Siła podłużna wynosi 0.



Rys.2.3.24

Przedział DC $0 \leq x_3 < 2l$ (Rys.2.3.24)

$$T(x_3) = qx_3$$

$$T(x_3 = 0) = 0 \quad T(x_3 = 2l) = q \cdot 2l = 2ql$$

$$M(x_3) = -qx_3 \cdot \frac{x_3}{2} = -q \cdot \frac{(x_3)^2}{2}$$

$$M(x_3 = 0) = 0 \quad M(x_3 = l) = -q \cdot \frac{(l)^2}{2} = -\frac{1}{2}ql^2$$

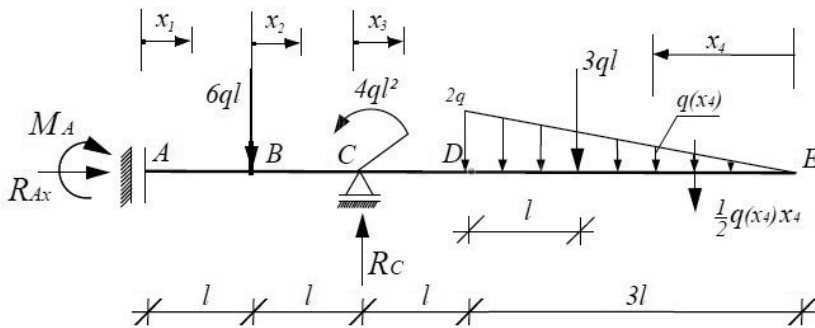
$$M(x_3 = 2l) = -q \cdot \frac{(2l)^2}{2} = -2ql^2$$

$$N(x_3) = 0$$

W przedziale DC siła tnąca zmienia się liniowo od 0 do $2ql$ natomiast moment zmienia się parabolicznie od 0 do $-2ql^2$. Siła podłużna wynosi 0. Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys. 2.3.24.

Przykład 2.3.3.

Dla belki przedstawionej Rys. 2.3.25. sporządzić wykresy sił wewnętrznych.



Rys.2.3.25.

1. Stopień statycznej niewyznaczalności $n=0$,
2. Obliczenie reakcji:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -6ql + R_C - 3ql = 0$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} = 0$$

$$\sum M_{(C)} = 0; \quad -M_A + 6ql \cdot l + 4ql^2 - 3ql \cdot 2l = 0$$

$$\text{stąd: } R_{Ax} = 0 \quad R_C = 9ql \quad M_A = 4ql^2$$

3. Równania sił wewnętrznych w poszczególnych przedziałach (Rys.2.3.25):

Przedział AB $0 \leq x_1 < l$ (Rys.2.3.25).

$$T(x_1) = 0$$

$$M(x_1) = M_A = 4ql^2$$

$$N(x_1) = -R_{Ax} = 0$$

W analizowanym przedziale zarówno siła poprzeczna jak i podłużna są równe 0 natomiast moment zginający jest stały i wynosi $4ql^2$.

Przedział BC $0 \leq x_2 < l$ (Rys.2.3.25).

$$T(x_2) = -6ql$$

$$M(x_2) = -6ql \cdot x_2 + M_A = -6ql \cdot x_2 + 4ql^2$$

$$M(x_2 = 0) = 4ql^2 \quad M(x_2 = l) = -6ql \cdot l + 4ql^2 = -2ql^2$$

$$N(x_2) = -R_{Ax} = 0$$

W przedziale tym siła tnąca ma stałą wartość $(-6ql)$ natomiast moment zmienia się liniowo od $4ql^2$ do $-2ql^2$. Siła podłużna wynosi 0.

Przedział CD $0 \leq x_3 < l$ (Rys.2.3.25)

$$T(x_3) = -6ql + R_C = -6ql + 9ql = 3ql$$

$$\begin{aligned} M(x_3) &= M_A - 6ql \cdot (l + x_3) + R_C \cdot x_3 - 4ql^2 = \\ &= 4ql^2 - 6ql \cdot (l + x_3) + 9ql \cdot x_3 - 4ql^2 \end{aligned}$$

$$M(x_3 = 0) = 4ql^2 - 6ql \cdot l - 4ql^2 = -6ql^2$$

$$M(x_3 = l) = 4ql^2 - 6ql \cdot (l + l) + 9ql \cdot l - 4ql^2 = -3ql^2$$

$$N(x_3) = -R_{Ax} = 0$$

Przedział ED $0 \leq x_4 < 3l$ (Rys.2.3.25).

$$\frac{q(x_4)}{x_4} = \frac{2q}{3l} \rightarrow q(x_4) = \frac{2qx_4}{3l}$$

$$T(x_4) = \frac{1}{2} q(x_4) \cdot x_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2qx_4}{3l} \cdot x_4 = \frac{qx_4^2}{3l}$$

$$T(x_4 = 0) = 0 \quad T\left(x_4 = \frac{3}{2}l\right) = \frac{3}{4}ql \quad T(x_4 = 3l) = 3ql$$

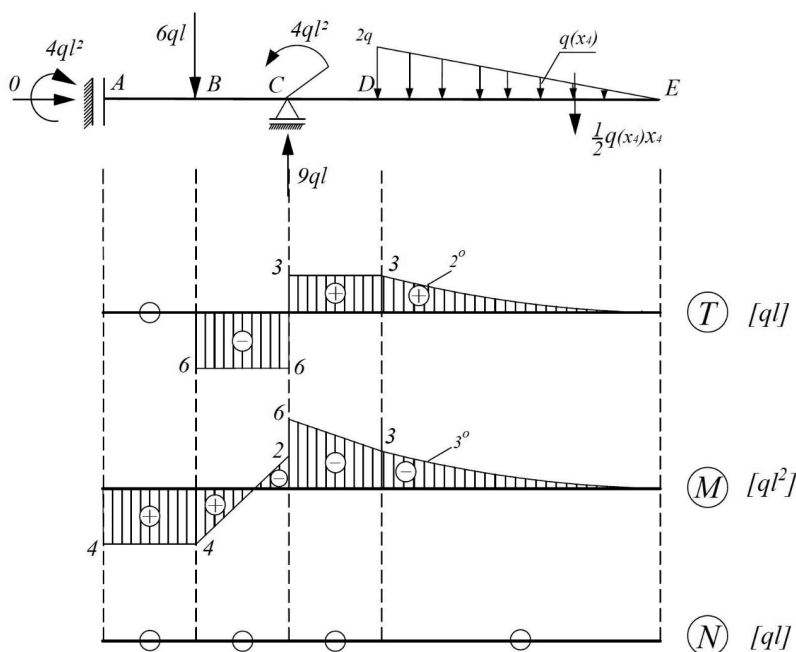
$$M(x_4) = -\frac{1}{2} q(x_4) \cdot x_4 \cdot \frac{x_4}{3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2qx_4}{3l} \cdot x_4 \cdot \frac{x_4}{3} = -q \cdot \frac{(x_4)^3}{9l}$$

$$M(x_4 = 0) = 0 \quad M\left(x_4 = \frac{3}{2}l\right) = -\frac{3}{8}ql^2$$

$$M(x_4 = 3l) = -3ql^2$$

$$N(x_4) = 0$$

W przedziale ED siła tnąca zmienia się parabolicznie od 0 do $3ql$ natomiast moment zmienia się zgodnie z równaniem krzywej trzeciego stopnia od 0 do $-2ql^2$. Siła podłużna wynosi 0.



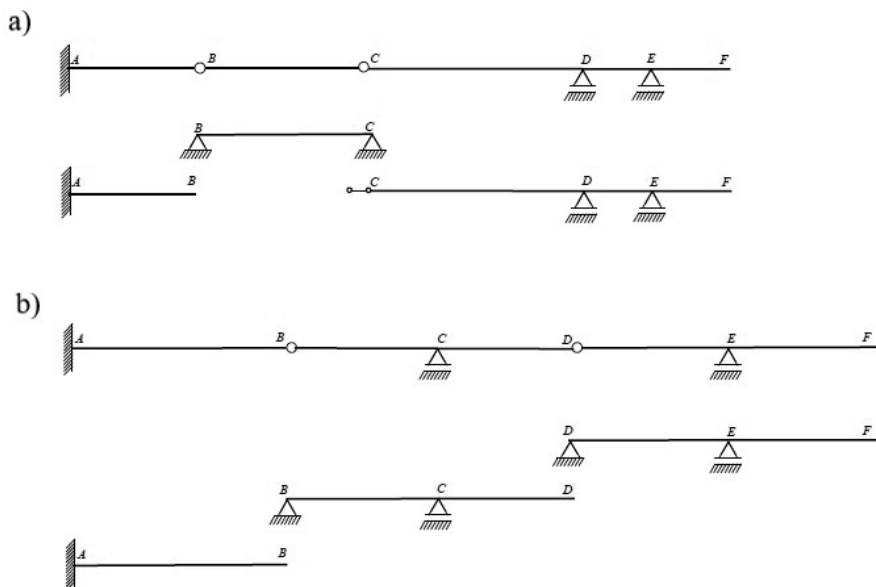
Rys.2.3.26.

Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys. 2.3.26.

2.4. Belki złożone

Przy wyznaczaniu sił wewnętrznych w belkach złożonych zazwyczaj dzieli się je w przegubach na belki proste, a następnie uwzględniając wzajemne oddziaływania belek na siebie, wyznacza się siły wewnętrzne dla każdej z nich.

Ponieważ belki połączone są przegubem to oddziałują na siebie wyłącznie poprzez siły poprzeczne i poprzeczne.



Rys.2.4.1.

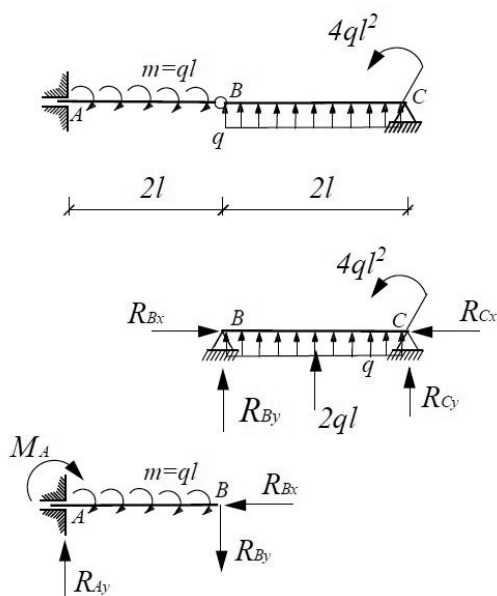
Belki proste powstałe po podziale belki złożonej muszą być statycznie wyznaczalne i geometrycznie niezmiennie. Dlatego też, w powstałych po podziale belkach dokładamy fikcyjne podpory (przegubowo nieprzesuwne) w przegubach tak, aby stały się one układem geometrycznie niezmiennym. Najniżej znajdują się belki, które bezpośrednio po podziale są statycznie wyznaczalne i nie potrzebują dodatkowych podpór. Najwyżej umieszczamy belkę, która po podziale nie ma żadnego podparcia i potrzebuje dwóch podpór fikcyjnych (Rys.2.4.1.a.) lub belkę, która po podziale opiera się na jednej podporze i potrzebuje dodatkowej fikcyjnej podpory (Rys.2.4.1.b.). Jeżeli belka ma w miejscu przegubu fikcyjną podporę to belkę z nią sąsiadującą

rysujemy poniżej i ma ona w miejscu tego przegubu swobodny koniec. W przypadku, gdy belka narysowana poniżej ma dwie podpory przegubowe przesuwne należy wprowadzić więź uniemożliwiający jej przesuw poziomy – Rys.2.4.1.a. (punkt C).

2.4.1. Przykłady obliczeniowe – belki złożone

Przykład 2.4.1.

Dla belki przedstawionej na Rys.2.4.2. sporządzić wykresy sił wewnętrznych.



Rys.2.4.2.

1. Stopień statycznej niewyznaczalności $n = r + s - 3t = 4 + 2 - 3 \cdot 2 = 0$,
2. Obliczenie reakcji:

Ponieważ belka nie jest obciążona w kierunku poziomym, to wszystkie składowe poziome reakcji są równe 0 $R_{Bx} = R_{Cx} = 0$

- belka prawa:

$$\sum M_{(C)} = 0; \quad -R_{By} \cdot 2l - 2ql \cdot l + 4ql^2 = 0 \quad R_{By} = ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{By} + R_{Cy} + 2ql = 0 \quad R_{Cy} = -3ql$$

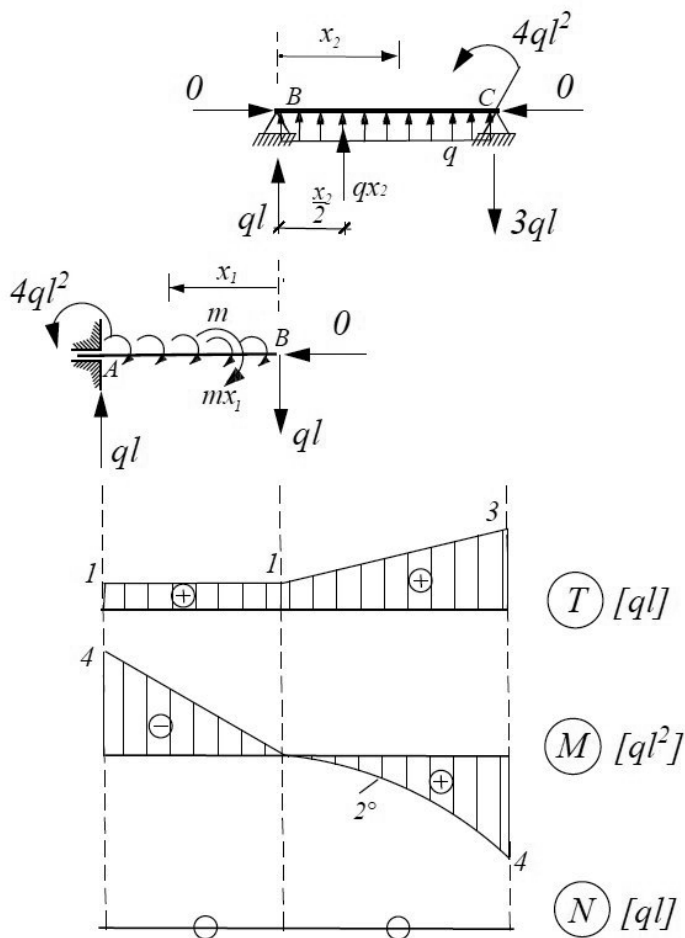
- belka lewa:

$$\sum M_{(A)} = 0; -M_A - m \cdot 2l - R_{By} \cdot 2l = -M_A - ql \cdot 2l - R_{By} \cdot 2l = 0$$

$$M_A = -4ql^2$$

$$\sum F_{iy} = 0; -R_{By} + R_{Ay} = 0$$

$$R_{Ay} = ql$$



Rys.2.4.3.

3. Równania sił wewnętrznych w poszczególnych przedziałach (Rys.2.4.3.):

Przedział BA $0 \leq x_1 < 2l$

$$T(x_1) = ql$$

$$M(x_1) = -m \cdot x_1 - ql \cdot x_1 = -ql \cdot x_1 - ql \cdot x_1 = -2qlx_1$$

$$M(x_1 = 0) = 0 \quad M(x_1 = 2l) = -4ql^2$$

$$N(x_1) = 0$$

Przedział BC $0 \leq x_2 < 2l$

$$T(x_2) = ql + qx_2$$

$$T(x_2 = 0) = ql \quad T(x_2 = 2l) = 3ql$$

$$M(x_2) = ql \cdot x_2 + qx_2 \cdot \frac{x_2}{2} = ql \cdot x_2 + q \cdot \frac{(x_2)^2}{2}$$

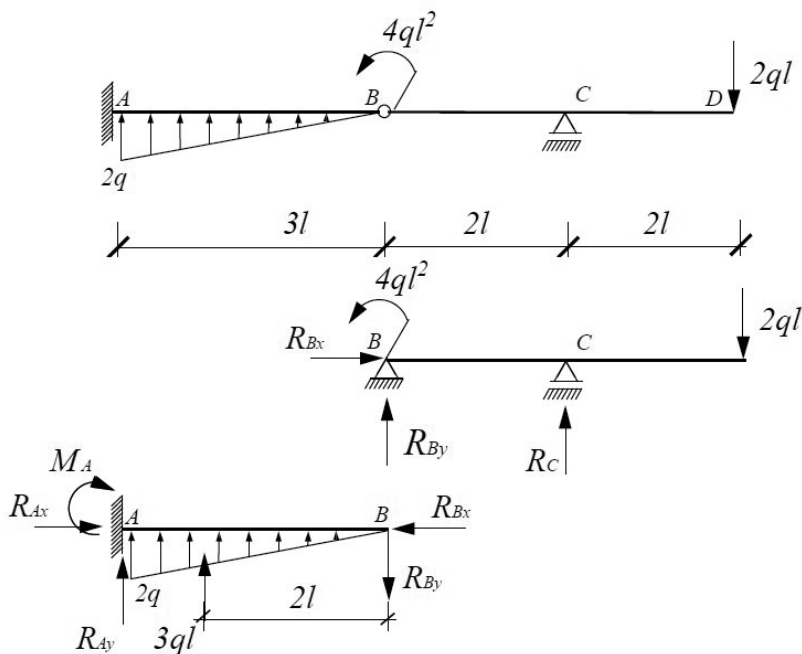
$$M(x_2 = 0) = 0 \quad M(x_2 = l) = \frac{3}{2}ql^2 \quad M(x_2 = 2l) = 4ql^2$$

$$N(x_2) = 0$$

Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys. 2.4.3.

Przykład 2.4.2.

Dla belki przedstawionej na Rys.2.4.4. sporządzić wykresy sił wewnętrznych.



Rys.2.4.4.

1. Stopień statycznej niewyznaczalności $n = r + s - 3t = 4 + 2 - 3 \cdot 2 = 0$,
2. Obliczenie reakcji:

Ponieważ belka nie jest obciążona w kierunku poziomym, to wszystkie składowe poziome reakcji są równe 0 $R_{Bx} = R_{Ax} = 0$

- belka prawa:

$$\sum M_{(C)} = 0; \quad -R_{By} \cdot 2l - 2ql \cdot 2l + 4ql^2 = 0 \quad R_{By} = 0 \quad ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{By} + R_C - 2ql = 0 \quad R_C = 2ql$$

- belka lewa:

$$\sum M_{(A)} = 0; \quad -M_A + 3ql \cdot l - R_{By} \cdot 3l = 0 \quad M_A = 3ql^2$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -R_{By} + 3ql + R_{Ay} = 0 \quad R_{Ay} = -3ql$$

3. Równania sił wewnętrznych w poszczególnych przedziałach (Rys.2.4.5.):

Przedział BA $0 \leq x_1 < 3l$

$$\frac{q(x_1)}{x_1} = \frac{2q}{3l} \rightarrow q(x_1) = \frac{2qx_1}{3l}$$

$$T(x_1) = -\frac{1}{2}q(x_1) \cdot x_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2qx_1}{3l} \cdot x_1 = -\frac{qx_1^2}{3l}$$

$$T(x_1 = 0) = 0 \quad T\left(x_1 = \frac{3}{2}l\right) = -\frac{3}{4}ql \quad T(x_1 = 3l) = -3ql$$

$$M(x_1) = \frac{1}{2}q(x_1) \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2qx_1}{3l} \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{3} = q \cdot \frac{(x_1)^3}{9l}$$

$$M(x_1 = 0) = 0 \quad M\left(x_1 = \frac{3}{2}l\right) = \frac{3}{8}ql^2 \quad M(x_1 = 3l) = 3ql^2$$

$$N(x_1) = 0$$

Przedział BC $0 \leq x_2 < 2l$

$$T(x_2) = 0$$

$$M(x_2) = -4ql^2$$

$$N(x_2) = 0$$

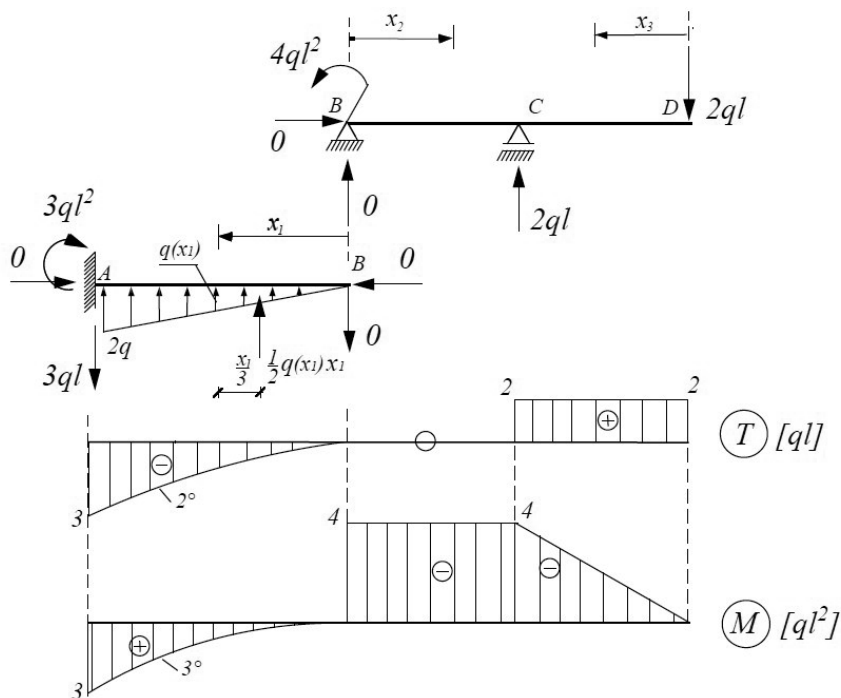
Przedział DC $0 \leq x_3 < 2l$

$$T(x_3) = 2ql$$

$$M(x_3) = -2ql \cdot x_3$$

$$M(x_3 = 0) = 0 \quad M(x_3 = 2l) = -4ql^2$$

$$N(x_3) = 0$$

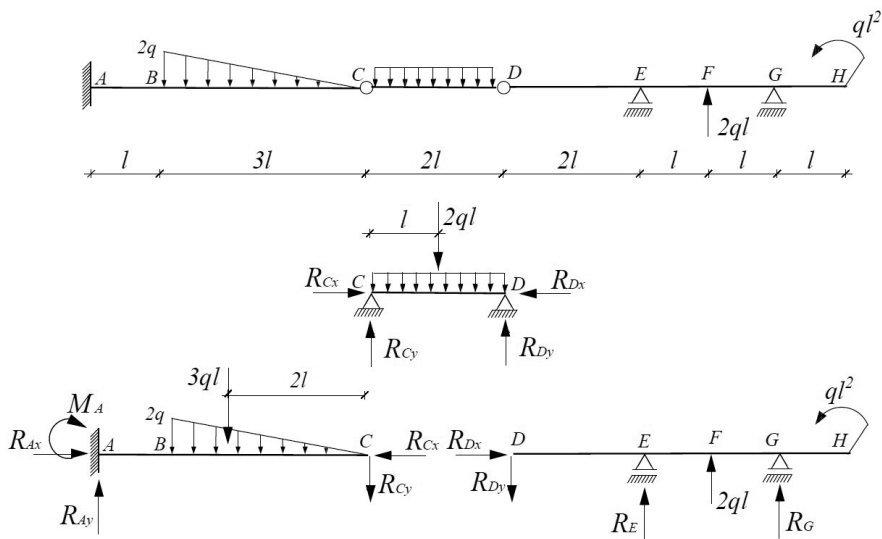


Rys.2.4.5.

Wykresy sił wewnętrznych (T i M) przedstawiono na Rys. 2.4.5. Wykres $N(x) = 0$.

Przykład 2.4.3.

Dla belki przedstawionej na Rys.2.4.6. sporządzić wykresy sił wewnętrznych.



Rys.2.4.6.

1. Stopień statycznej niewyznaczalności $n = r + s - 3t = 5 + 4 - 3 \cdot 3 = 0$,

2. Obliczenie reakcji:

Ponieważ belka nie jest obciążona w kierunku poziomym, to wszystkie składowe poziome reakcji są równe 0 $R_{Ax} = R_{Cx} = R_{Dx} = 0$

- belka środkowa:

$$\sum M_{(C)} = 0; \quad R_{Dy} \cdot 2l - 2ql \cdot l = 0 \quad R_{Dy} = ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{Dy} - 2ql + R_{Cy} = 0 \quad R_{Cy} = ql$$

Powyższych reakcji można było nie wyliczać z równań równowagi.

$R_{Cy} = R_{Dy} = ql$, ponieważ belka ta jest symetryczna i symetrycznie obciążona.

- belka lewa:

$$\sum M_{(A)} = 0; \quad -M_A - 3ql \cdot 2l - R_{Cy} \cdot 4l = 0 \quad M_A = -10 ql^2$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -R_{Cy} - 3ql + R_{Ay} = 0 \quad R_{Ay} = 4ql$$

- belka prawa:

$$\sum M_{(E)} = 0; \quad R_{Dy} \cdot 2l + 2ql \cdot l + R_G \cdot 2l + ql^2 = 0 \quad R_G = -\frac{5}{2} ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -R_{Dy} + 2ql + R_E + R_G = 0 \quad R_E = \frac{3}{2} ql$$

3. Równania sił wewnętrznych w poszczególnych przedziałach (Rys.2.4.7.):

Przedział AB $0 \leq x_1 < l$

$$T(x_1) = 4ql$$

$$M(x_1) = -10ql^2 + 4ql \cdot x_1$$

$$M(x_1 = 0) = -10ql^2 \quad M(x_1 = l) = -6ql^2$$

$$N(x_1) = 0$$

Przedział CB $0 \leq x_2 < 3l$

$$\frac{q(x_2)}{x_2} = \frac{2q}{3l} \rightarrow q(x_2) = \frac{2qx_2}{3l}$$

$$T(x_2) = ql + \frac{1}{2}q(x_2) \cdot x_2 = ql + \frac{1}{2} \cdot \frac{2qx_2}{3l} \cdot x_2 = ql + \frac{qx_2^2}{3l}$$

$$T(x_2 = 0) = ql \quad T\left(x_2 = \frac{3}{2}l\right) = \frac{7}{4}ql$$

$$T(x_2 = 3l) = 4ql$$

$$\begin{aligned} M(x_2) &= -ql \cdot x_2 - \frac{1}{2}q(x_2) \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{3} = -ql \cdot x_2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2qx_2}{3l} \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{3} = \\ &= -ql \cdot x_2 - q \cdot \frac{(x_2)^3}{9l} \end{aligned}$$

$$M(x_2 = 0) = 0 \quad M\left(x_2 = \frac{3}{2}l\right) = -\frac{15}{8}ql^2$$

$$M(x_2 = 3l) = -6ql^2$$

$$N(x_2) = 0$$

Przedział CD $0 \leq x_3 < 2l$

$$T(x_3) = ql - qx_3$$

$$T(x_3 = 0) = ql \quad T(x_3 = 2l) = -ql$$

$$T(x_3) = 0 \rightarrow ql - qx_3 = 0 \rightarrow x_3 = l$$

$$M(x_3) = ql \cdot x_3 - qx_3 \cdot \frac{x_3}{2} = ql \cdot x_3 - q \cdot \frac{(x_3)^2}{2}$$

$$M(x_3 = 0) = 0$$

$$M(x_3 = 2l) = 0$$

$$M(x_3 = l) = ql \cdot l - q \cdot \frac{(l)^2}{2} = \frac{1}{2}ql^2$$

$$N(x_3) = 0$$

Przedział DE $0 \leq x_4 < 2l$

$$T(x_4) = -ql$$

$$M(x_4) = -ql \cdot x_4$$

$$M(x_4 = 0) = 0 \quad M(x_4 = 2l) = -2ql^2$$

$$N(x_4) = 0$$

Przedział EF $0 \leq x_5 < l$

$$T(x_5) = -ql + \frac{3}{2}ql = \frac{1}{2}ql$$

$$M(x_5) = -ql \cdot (2l + x_5) + \frac{3}{2}ql \cdot x_5$$

$$M(x_5 = 0) = -2ql^2$$

$$M(x_5 = l) = -\frac{3}{2}ql^2$$

$$N(x_5) = 0$$

Przedział GF $0 \leq x_6 < l$

$$T(x_6) = \frac{5}{2}ql$$

$$M(x_6) = ql^2 - \frac{5}{2}ql \cdot x_6$$

$$M(x_6 = 0) = ql^2$$

$$M(x_6 = l) = -\frac{3}{2}ql^2$$

$$N(x_6) = 0$$

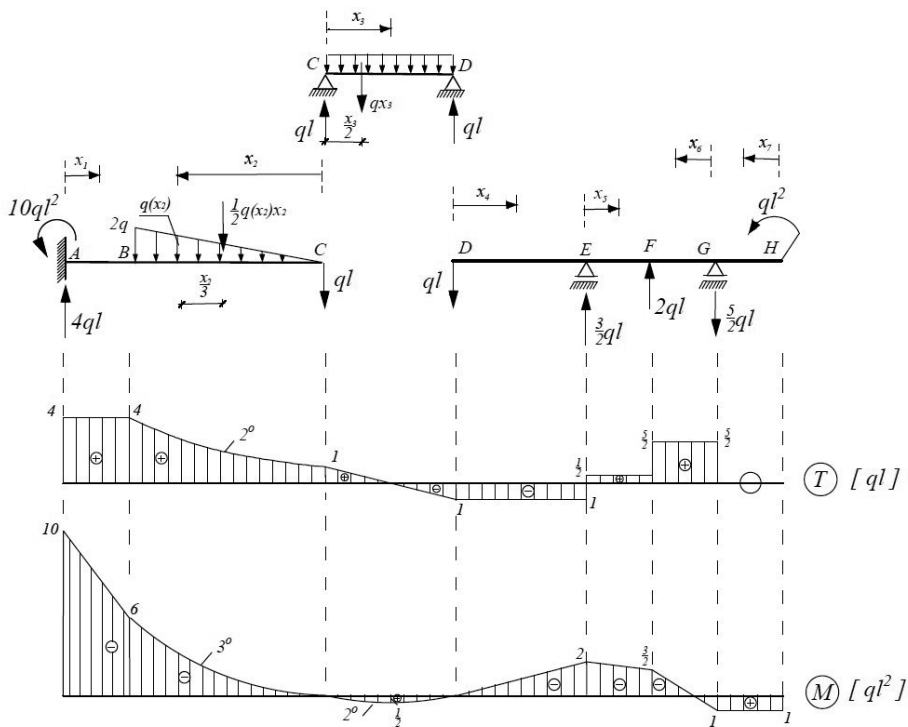
Przedział HG $0 \leq x_7 < l$

$$T(x_7) = 0$$

$$M(x_7) = ql^2$$

$$N(x_7) = 0$$

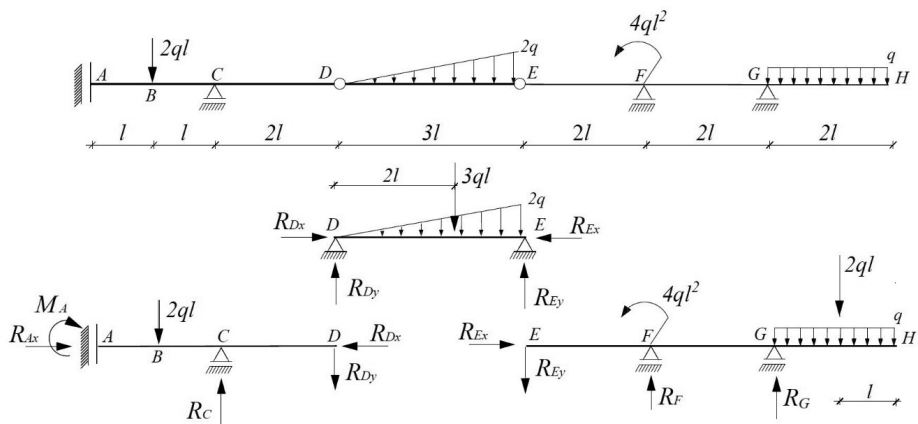
Wykresy sił wewnętrznych (T i M) przedstawiono na Rys. 2.4.7. Wykres $N(x)=0$.



Rys.2.4.7.

Przykład 2.4.4.

Dla belki przedstawionej na Rys.2.4.8. sporządzić wykresy sił wewnętrznych.



Rys.2.4.8.

1. Stopień statycznej niewyznaczalności $n = r + s - 3t = 5 + 4 - 3 \cdot 3 = 0$,

2. Obliczenie reakcji:

Ponieważ belka nie jest obciążona w kierunku poziomym, to wszystkie składowe poziome reakcji są równe 0 $R_{Ax} = R_{Dx} = R_{Ex} = 0$

- belka środkowa:

$$\sum M_{(D)} = 0; \quad R_{Ey} \cdot 3l - 3ql \cdot 2l = 0 \quad R_{Ey} = 2ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{Ey} + R_{Dy} - 3ql = 0 \quad R_{Dy} = ql$$

- belka prawa:

$$\sum M_{(F)} = 0; \quad R_G \cdot 2l - 2ql \cdot 3l + R_{Ey} \cdot 2l + 4ql^2 = 0 \quad R_G = -ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_G + R_F - R_{Ey} - 2ql = 0 \quad R_F = 5ql$$

- belka lewa:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -R_{Dy} - 2ql + R_C = 0 \quad R_C = 3ql$$

$$\sum M_{(A)} = 0; \quad -M_A - 2ql \cdot l + R_C \cdot 2l - R_{Dy} \cdot 4l = 0 \quad M_A = 0$$

3. Równania sił wewnętrznych w poszczególnych przedziałach (Rys.2.4.9.):

Przedział AB $0 \leq x_1 < l$

$$T(x_1) = 0$$

$$M(x_1) = 0$$

$$N(x_1) = 0$$

Przedział BC $0 \leq x_2 < l$

$$T(x_2) = -2ql$$

$$M(x_2) = -2ql \cdot x_2$$

$$M(x_2 = 0) = 0 \quad M(x_2 = l) = -2ql^2$$

$$N(x_2) = 0$$

Przedział DC $0 \leq x_3 < 2l$

$$T(x_3) = ql$$

$$M(x_3) = -ql \cdot x_3$$

$$M(x_3 = 0) = 0 \quad M(x_3 = 2l) = -2ql^2$$

$$N(x_3) = 0$$

Przedział DE $0 \leq x_4 < 3l$

$$\frac{q(x_4)}{x_4} = \frac{2q}{3l} \rightarrow q(x_4) = \frac{2qx_4}{3l}$$

$$T(x_4) = ql - \frac{1}{2}q(x_4) \cdot x_4 = ql - \frac{1}{2} \cdot \frac{2qx_4}{3l} \cdot x_4 = ql - \frac{qx_4^2}{3l}$$

$$T(x_4 = 0) = ql \quad T\left(x_4 = \frac{3}{2}l\right) = +\frac{1}{4}ql \quad T(x_4 = 3l) = -2ql$$

$$T(x_4) = 0 \rightarrow ql - \frac{1}{2} \cdot \frac{2qx_4}{3l} \cdot x_4 = 0 \rightarrow 3ql^2 - qx_4^2 = 0 \rightarrow x_4 = \sqrt{3}l$$

$$\begin{aligned} M(x_4) &= qlx_4 - \frac{1}{2}q(x_4) \cdot x_4 \cdot \frac{x_4}{3} = qlx_4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2qx_4}{3l} \cdot x_4 \cdot \frac{x_4}{3} = \\ &= qlx_4 - q \cdot \frac{(x_4)^3}{9l} \end{aligned}$$

$$M(x_4 = 0) = 0$$

$$M(x_4 = 3l) = 0 \quad M\left(x_4 = \frac{3}{2}l\right) = \frac{9}{8}ql^2$$

$$M(x_4 = \sqrt{3}l) = ql \cdot \sqrt{3}l - q \cdot \frac{(\sqrt{3}l)^3}{9l} = \frac{2}{3}\sqrt{3}ql^2$$

$$N(x_4) = 0$$

Przedział EF $0 \leq x_5 < 2l$

$$T(x_5) = -2ql$$

$$M(x_5) = -2ql \cdot x_5$$

$$M(x_5 = 0) = 0 \quad M(x_5 = 2l) = -4ql^2$$

$$N(x_5) = 0$$

Przedział FG $0 \leq x_6 < 2l$

$$T(x_6) = -2ql + 5ql = 3ql$$

$$M(x_6) = -4ql^2 - 2ql \cdot (2l + x_6) + 5ql \cdot x_6$$

$$M(x_6 = 0) = -4ql^2 - 2ql \cdot 2l = -8ql^2$$

$$M(x_6 = 2l) = -4ql^2 - 2ql \cdot (2l + 2l) + 5ql \cdot 2l = -2ql^2$$

$$N(x_6) = 0$$

Przedział HG $0 \leq x_7 < 2l$

$$T(x_7) = qx_7$$

$$T(x_7 = 0) = 0$$

$$T(x_7 = 2l) = 2ql$$

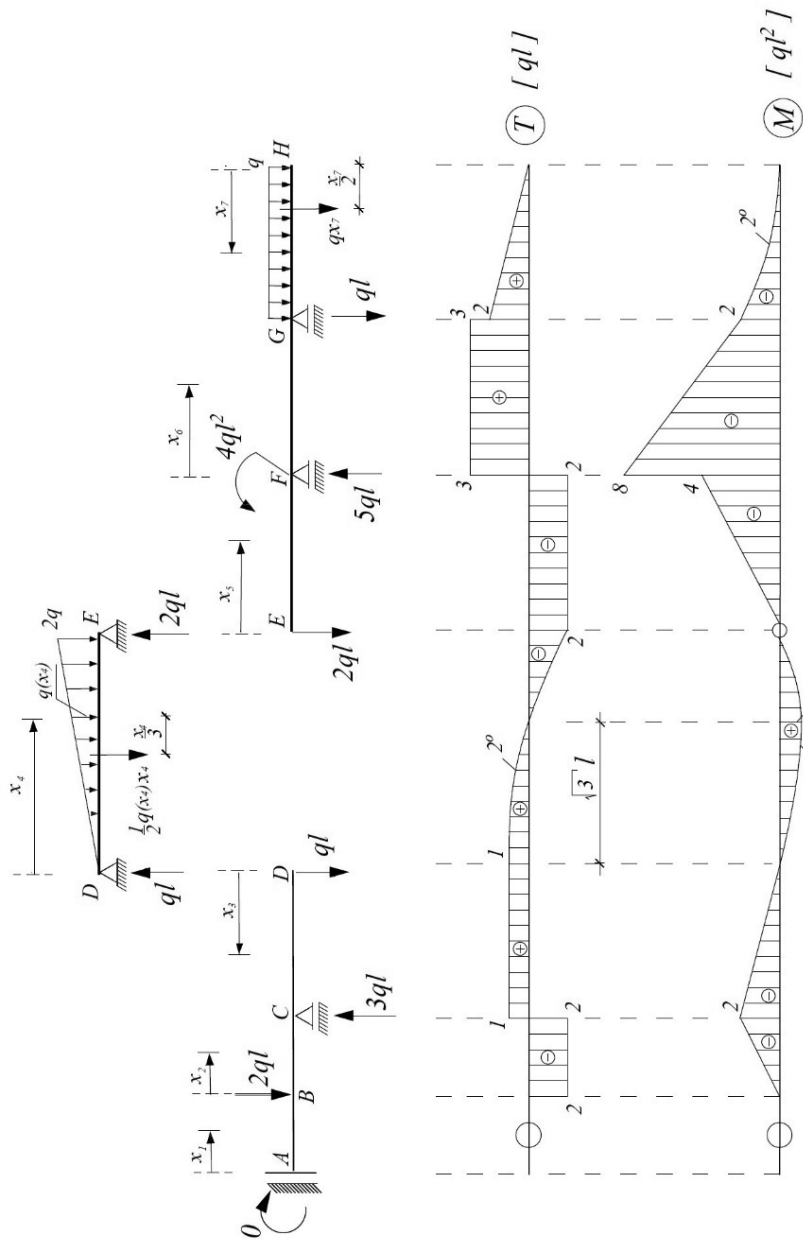
$$M(x_7) = -qx_7 \cdot \frac{x_7}{2} = -q \cdot \frac{(x_7)^2}{2}$$

$$M(x_7 = 0) = 0$$

$$M(x_7 = 2l) = -2ql^2$$

$$N(x_7) = 0$$

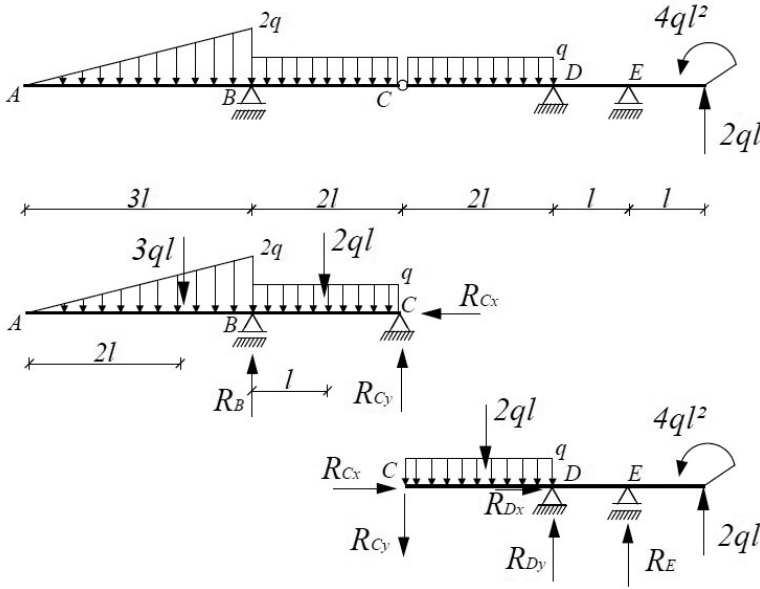
Wykresy sił wewnętrznych (T i M) przedstawiono na Rys.2.4.9. Wykres $N(x)=0$.



Rys.2.4.9.

Przykład 2.4.5.

Dla belki przedstawionej na Rys.2.4.10. sporządzić wykresy sił wewnętrznych.



Rys.2.4.10.

1. Stopień statycznej niewyznaczalności $n = r + s - 3t = 4 + 2 - 3 \cdot 2 = 0$

2. Obliczenie reakcji:

Ponieważ belka nie jest obciążona w kierunku poziomym, to wszystkie składowe poziome reakcji są równe 0 $R_{Cx} = R_{Dx} = 0$

- belka lewa:

$$\sum M_{(B)} = 0; \quad 3ql \cdot l + R_{Cy} \cdot 2l - 2ql \cdot l = 0 \quad R_{Cy} = -\frac{1}{2} ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_B + R_{Cy} - 2ql - 3ql = 0 \quad R_B = \frac{11}{2} ql$$

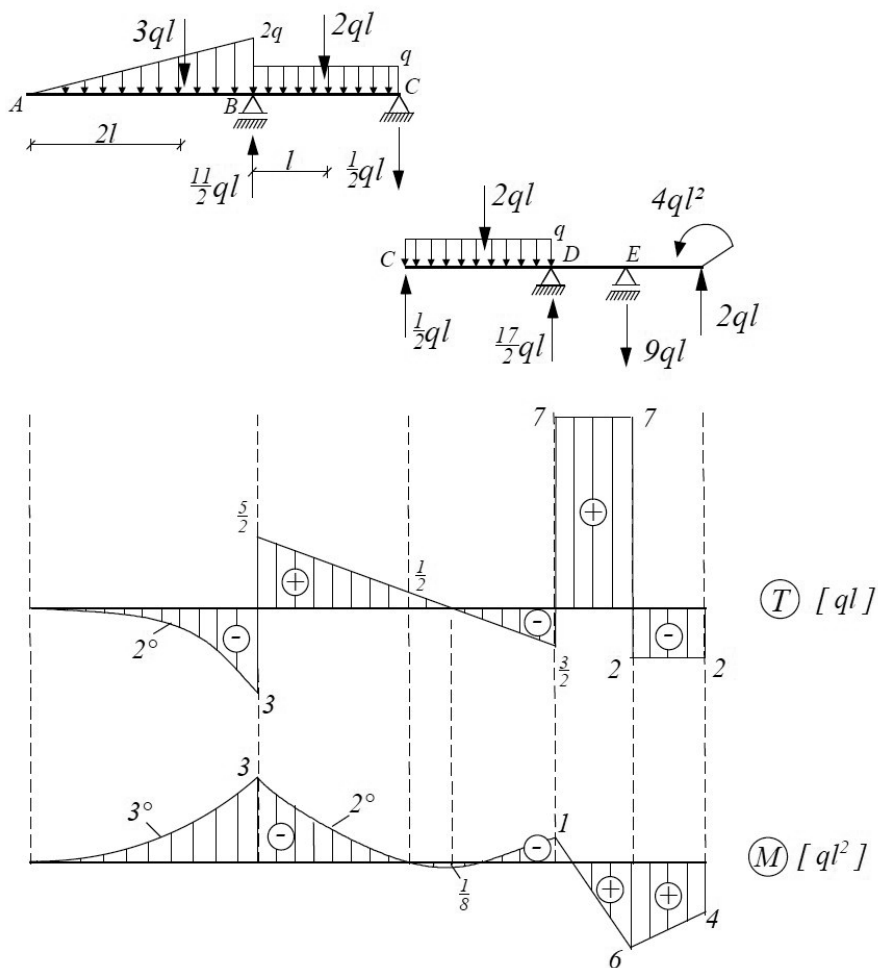
- belka prawa:

$$\sum M_{(D)} = 0; \quad R_E \cdot l + 2ql \cdot l + R_{Cy} \cdot 2l + 4ql^2 + 2ql \cdot 2l = 0$$

$$R_E = -9 ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -R_{Cy} + R_E + R_{Dy} - 2ql + 2ql = 0 \quad R_{Dy} = \frac{17}{2} ql$$

Wykresy sił wewnętrznych (T i M) przedstawiono na Rys. 2.4.11. Wykres $N(x)=0$.



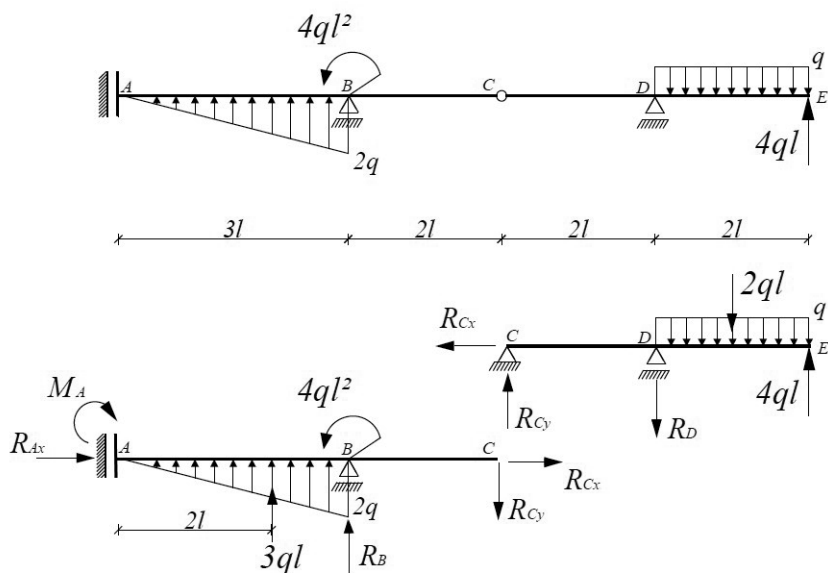
Rys.2.4.11.

Przykład 2.4.6.

Dla belki przedstawionej na Rys.2.4.12. sporządzić wykresy sił wewnętrznych.

1. Stopień statycznej niewyznaczalności $n = r + s - 3t = 4 + 2 - 3 \cdot 2 = 0$,
2. Obliczenie reakcji:

Ponieważ belka nie jest obciążona w kierunku poziomym, to wszystkie składowe poziome reakcji są równe 0 $R_{Ax} = R_{Cx} = 0$



Rys.2.4.12.

- belka prawa:

$$\sum M_{(D)} = 0; \quad 4ql \cdot 2l - R_{Cy} \cdot 2l - 2ql \cdot l = 0 \quad R_{Cy} = 3ql$$

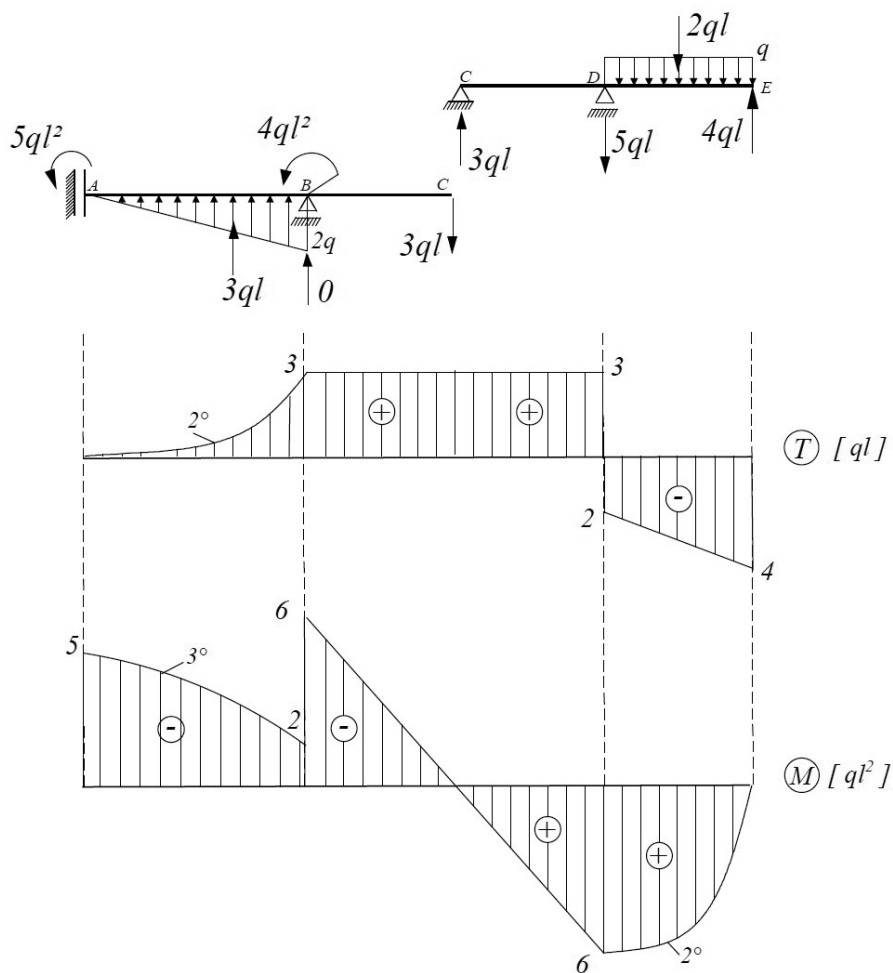
$$\sum F_{iy} = 0; \quad -R_D + R_{Cy} - 2ql + 4ql = 0 \quad R_D = 5ql$$

- belka lewa:

$$\sum M_{(B)} = 0; \quad -M_A - 3ql \cdot l - R_{Cy} \cdot 2l + 4ql^2 = 0 \quad M_A = -5ql^2$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -R_{Cy} + R_B + 3ql = 0 \quad R_B = 0$$

Wykresy sił wewnętrznych (T i M) przedstawiono na Rys. 2.4.13. Wykres $N(x)=0$.

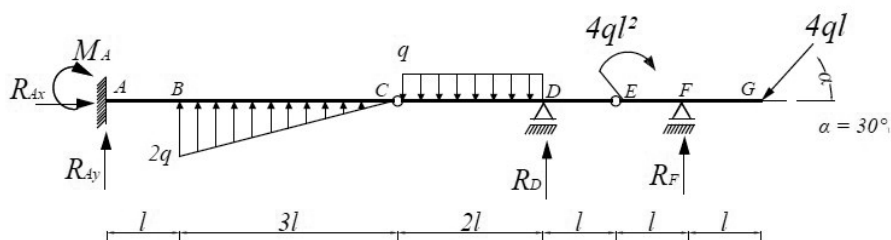


Rys.2.4.13.

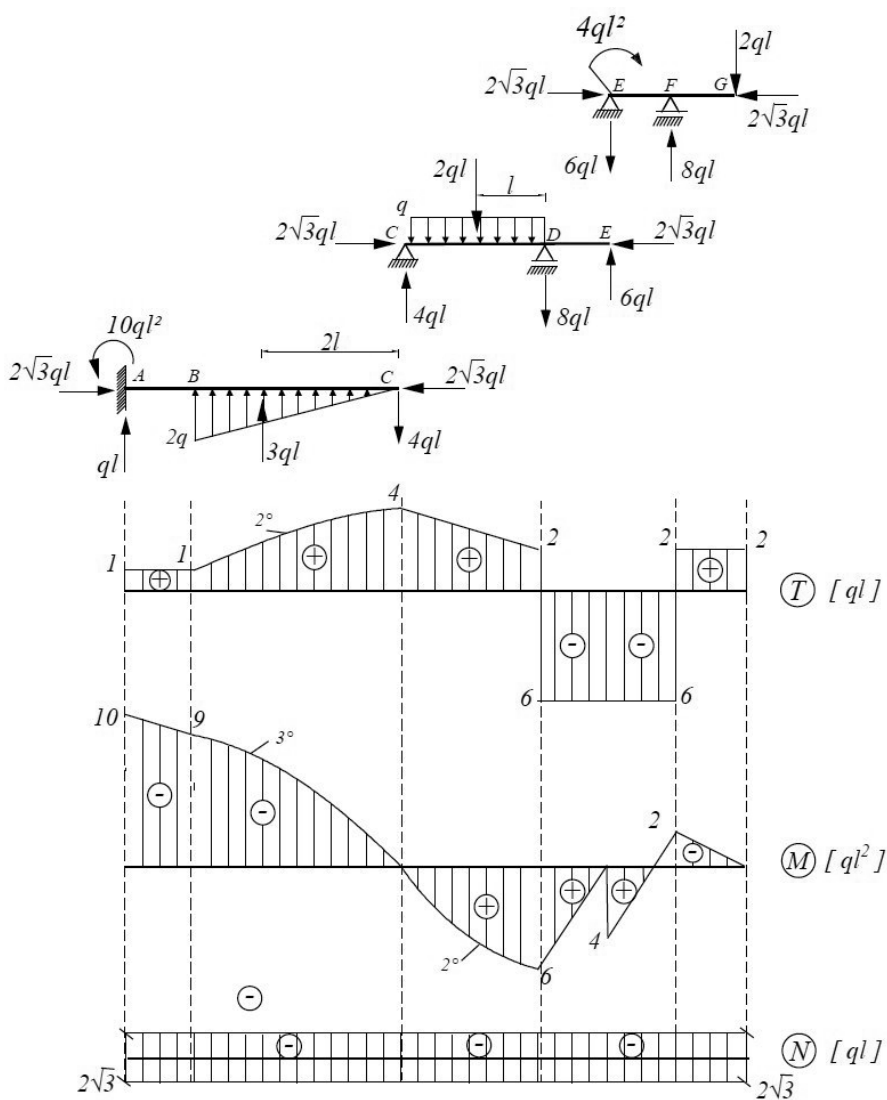
Przykład 2.4.7.

Dla belki przedstawionej na Rys.2.4.14. sporządzić wykresy sił wewnętrznych.

Wykresy sił wewnętrznych (T, M i N) przedstawiono na Rys.2.4.15.



Rys.2.4.14.

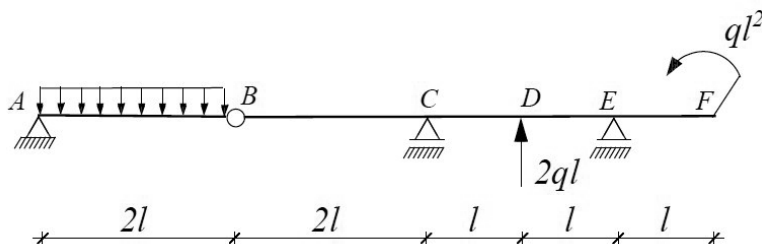


Rys.2.4.15.

2.4.2. Belki – zadania do samodzielnego rozwiązania

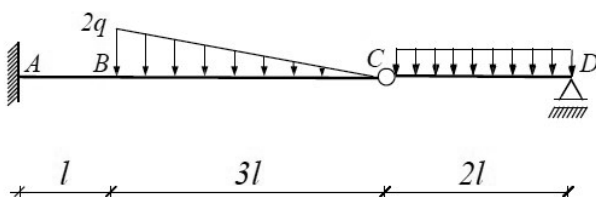
Dla belek przedstawionych poniżej sporządzić wykresy sił wewnętrznych.

a)



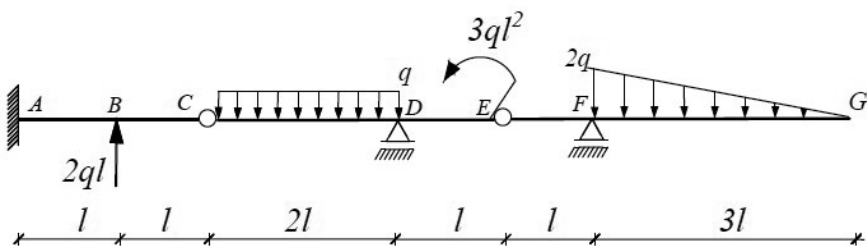
Rys.2.4.16.

b)



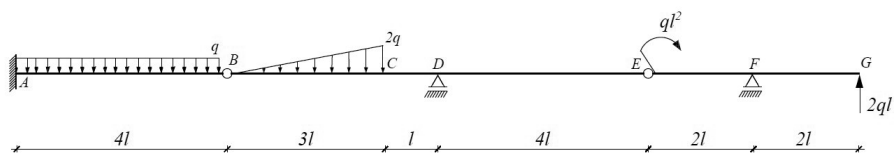
Rys.2.4.17.

c)



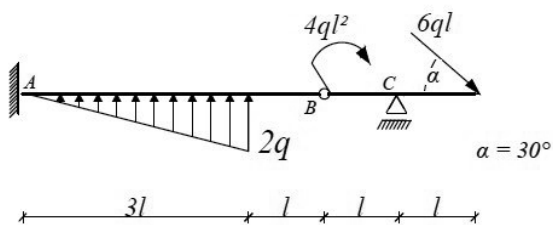
Rys.2.4.18.

d)



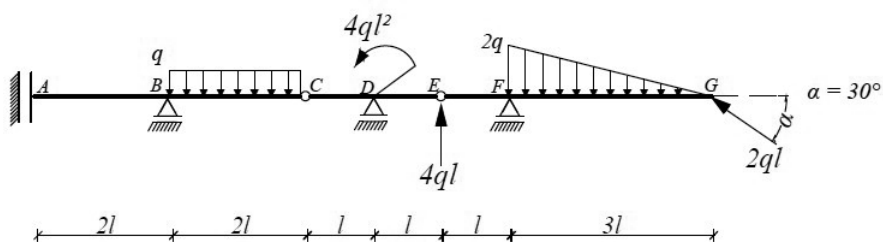
Rys.2.4.19.

e)



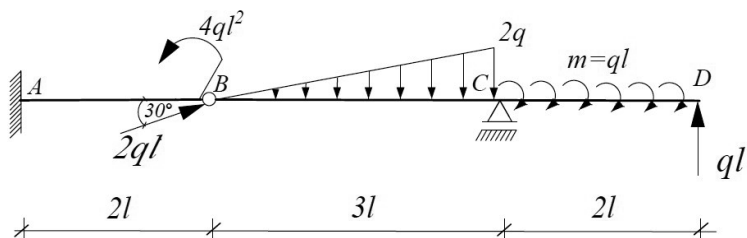
Rys.2.4.20.

f)



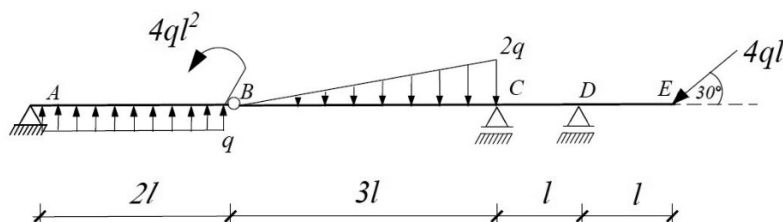
Rys.2.4.21.

g)



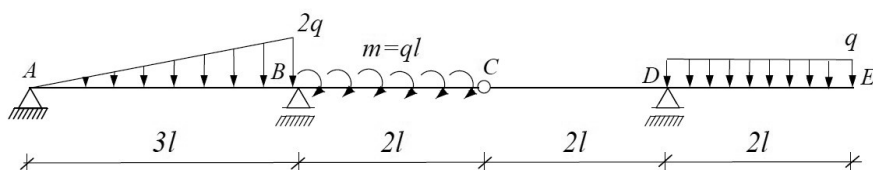
Rys.2.4.22.

h)



Rys.2.4.23.

i)



Rys.2.4.24.

2.5. Płaskie układy ramowe – siły wewnętrzne

Układ prętów połączonych ze sobą w sposób sztywny lub przegubowy nazywamy ramą (ramownicą). Jeżeli wszystkie pręty leżą w jednej płaszczyźnie i obciążenia działają również w tej płaszczyźnie to mamy do czynienia z ramą płaską.

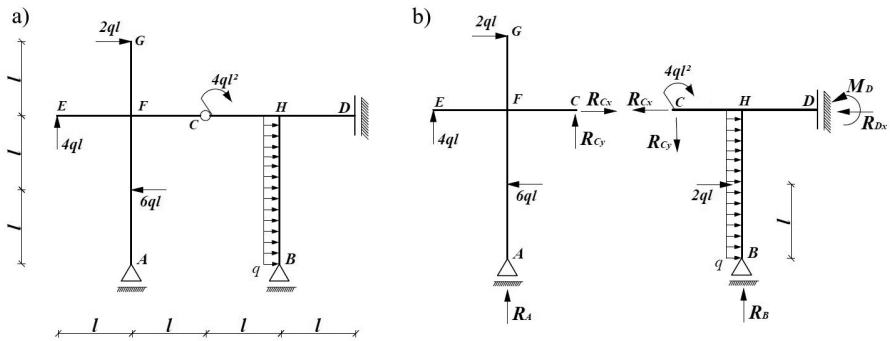
Układ taki o ile ma spełniać właściwie swoje zadanie jako element konstrukcji budowlanej, powinien zajmować niezmiennie położenie w przestrzeni. Jako całość musi być więc połączony z podłożem, a poszczególne jego elementy muszą być ze sobą połączone w sposób geometrycznie niezmienny.

Zasady wyznaczania sił wewnętrznych w płaskich układach ramowych są analogicznie jak w belkach prezentowanych rozdziałach 2.3. i 2.4.

2.5.1. Przykłady obliczeniowe – ramy

Przykład 2.5.1.

Dla ramy przedstawionej Rys.2.5.1. sporządzić wykresy sił wewnętrznych.



Rys.2.5.1.

1. Stopień statycznej niewyznaczalności $n = r + s - 3t = 4 + 2 - 3 \cdot 2 = 0$,

2. Obliczenie reakcji:

Ramę złożoną przedstawioną na Rys.2.5.1.a. rozdzielono w przegubie C na dwie ramy proste, uwzględniając ich wzajemne oddziaływania.

- rama lewa:

$$\sum M_{(C)} = 0; \quad -R_A \cdot l - 2ql \cdot l - 4ql \cdot 2l - 6ql \cdot l = 0 \quad R_A = -16ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_A + 4ql + R_{Cy} = 0 \quad R_{Cy} = 12ql$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Cx} + 2ql - 6ql = 0 \quad R_{Cx} = 4ql$$

- rama prawa:

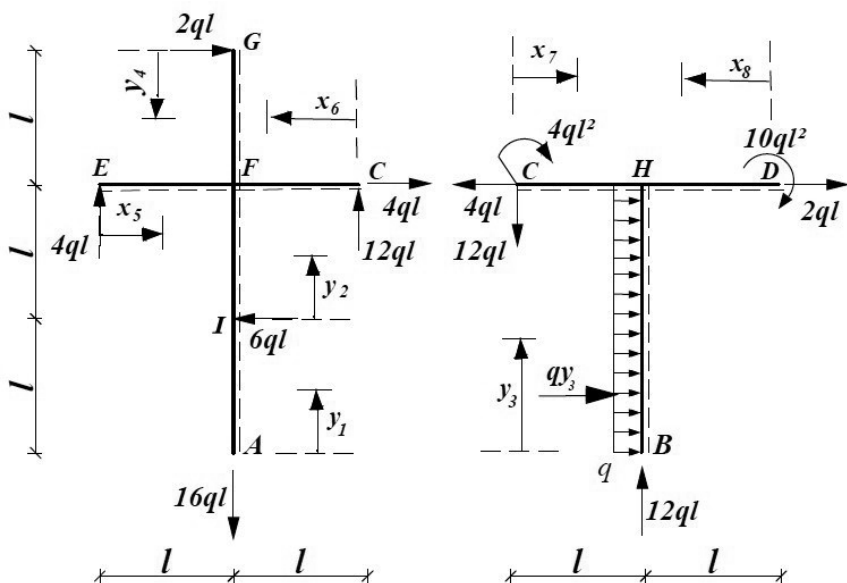
$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_B - R_{Cy} = 0 \quad R_B = 12ql$$

$$\sum M_{(H)} = 0; \quad M_D + R_{Cy} \cdot l + 2ql \cdot l - 4ql^2 = 0 \quad M_D = -10ql^2$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -R_{Cx} + 2ql - R_{Dx} = 0 \quad R_{Dx} = -2ql$$

3. Równania sił wewnętrznych w poszczególnych przedziałach.

Na Rys.2.5.2. przedstawiono układ sił czynnych i biernych działających na analizowaną ramę. W celu łatwiejszego znakowania sił wewnętrznych na rysunku linią przerywaną zaznaczono „spody” pręta.



Rys.2.5.2.

Przedział AI $0 \leq y_1 < l$

$$T(y_1) = 0$$

$$M(y_1) = 0$$

$$N(y_1) = 16ql$$

Przedział IF $0 \leq y_2 < l$

$$T(y_2) = 6ql$$

$$M(y_2) = 6ql \cdot y_2$$

$$M(y_2 = 0) = 0$$

$$M(y_2 = l) = 6ql^2$$

$$N(y_2) = 16ql$$

Przedział BH $0 \leq y_3 < 2l$

$$T(y_3) = -qy_3$$

$$T(y_3 = 0) = 0$$

$$T(y_3 = 2l) = -q \cdot 2l = -2ql$$

$$M(y_3) = -qy_3 \cdot \frac{y_3}{2} = -q \cdot \frac{(y_3)^2}{2}$$

$$M(y_3 = 0) = 0$$

$$M(y_3 = 2l) = -q \cdot \frac{(2l)^2}{2} = -2ql^2$$

$$N(y_3) = -12ql$$

Przedział GF $0 \leq y_4 < l$

$$T(y_4) = 2ql$$

$$M(y_4) = -2ql \cdot y_4$$

$$M(y_4 = 0) = 0$$

$$M(y_4 = l) = -2ql \cdot l = -2ql^2$$

$$N(y_4) = 0$$

Przedział EF $0 \leq x_5 < l$

$$T(x_5) = 4ql$$

$$M(x_5) = 4ql \cdot x_5$$

$$M(x_5 = 0) = 0$$

$$M(x_5 = l) = 4ql^2$$

$$N(x_5) = 0$$

Przedział CF $0 \leq x_6 < l$

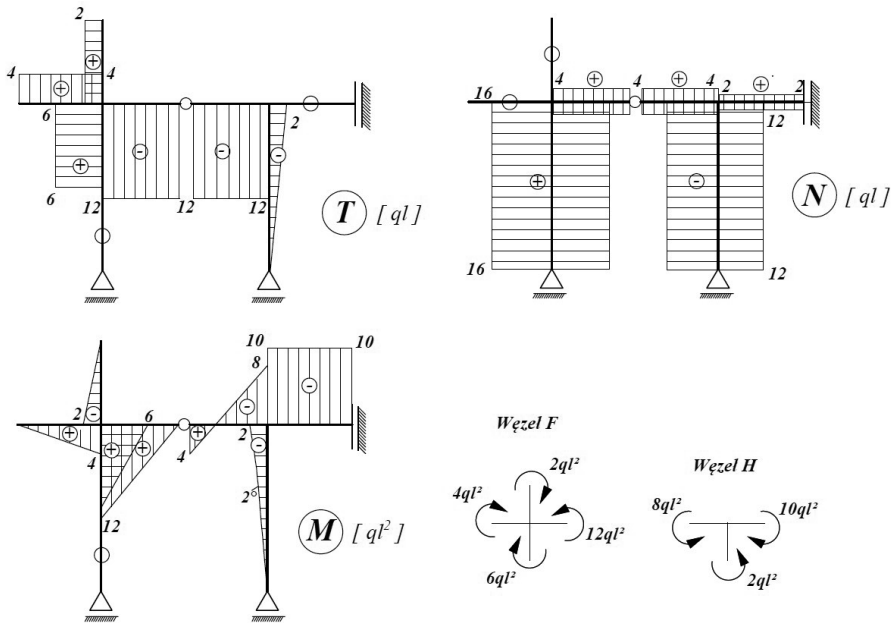
$$T(x_6) = -12ql$$

$$M(x_6) = 12ql \cdot x_6$$

$$M(x_6 = 0) = 0$$

$$M(x_6 = l) = 12ql^2$$

$$N(x_6) = 4ql$$



Rys.2.5.3.

Przedział CH $0 \leq x_7 < l$

$$T(x_7) = -12ql$$

$$M(x_7) = 4ql^2 - 12ql \cdot x_7$$

$$M(x_7 = 0) = 4ql^2 \quad M(x_7 = l) = -8ql^2$$

$$N(x_7) = 4ql$$

Przedział DH $0 \leq x_8 < l$

$$T(x_8) = 0$$

$$M(x_8) = -10ql^2$$

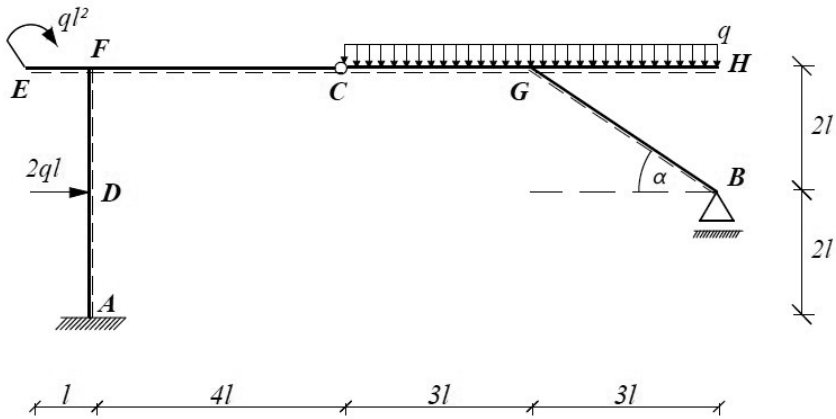
$$N(x_8) = 2ql$$

Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys. 2.5.3.

Poprawność analizy potwierdziła równowaga momentów w węzłach F i H ramy.

Przykład 2.5.2.

Dla ramy przedstawionej Rys.2.5.4. sporządzić wykresy sił wewnętrznych.



Rys.2.5.4.

1. Stopień statycznej niewyznaczalności $n = r + s - 3t = 4 + 2 - 3 \cdot 2 = 0$

2. Obliczenie reakcji:

Ramę złożoną przedstawioną na Rys.2.5.4. rozdzielono w przegubie C na dwie ramy proste uwzględniając ich wzajemne oddziaływanie (Rys.2.5.5.).

- rama prawa:

$$\sum M_{(C)} = 0; \quad R_B \cdot 6l - 6ql \cdot 3l = 0 \quad R_B = 3ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_B - 6ql + R_{Cy} = 0 \quad R_{Cy} = 3ql$$

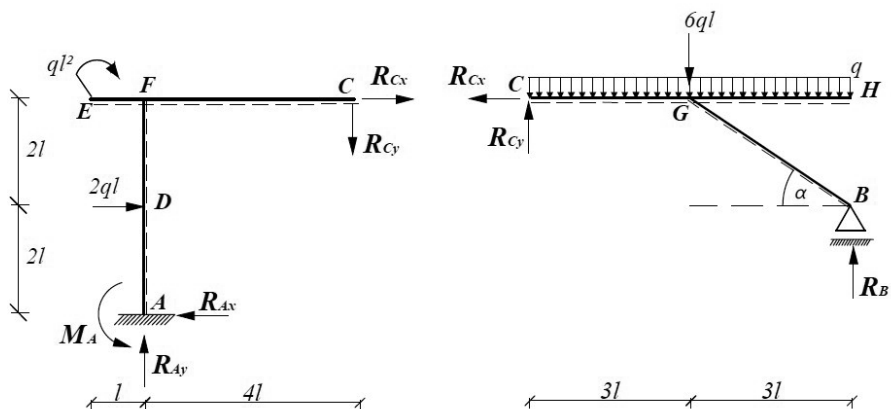
$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Cx} = 0$$

- rama lewa:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{Ay} - R_{Cy} = 0 \quad R_{Ay} = 3ql$$

$$\sum M_{(A)} = 0; \quad M_A - R_{Cy} \cdot 4l - R_{Cx} \cdot 4l - 2ql \cdot 2l - ql^2 = 0 \quad M_A = 17ql^2$$

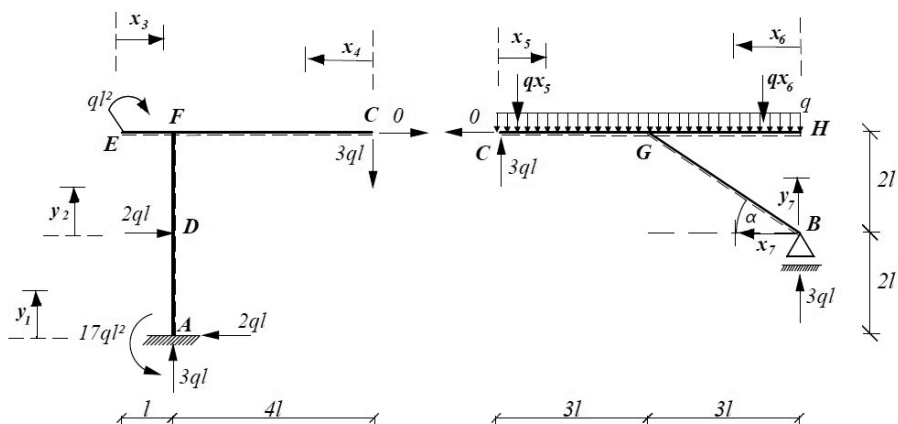
$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Cx} + 2ql - R_{Ax} = 0 \quad R_{Ax} = 2ql$$



Rys.2.5.5.

3. Równania sił wewnętrznych w poszczególnych przedziałach.

Na Rys.2.5.6. przedstawiono układ sił czynnych i biernych działających na analizowaną ramę.



Rys.2.5.6.

Przedział AD $0 \leq y_1 < 2l$

$$T(y_1) = 2ql$$

$$M(y_1) = -17ql^2 + 2ql \cdot y_1$$

$$M(y_1 = 0) = -17ql^2$$

$$M(y_1 = 2l) = -13ql^2$$

$$N(y_1) = -3ql$$

Przedział DF $0 \leq y_2 < 2l$

$$T(y_2) = 2qi - 2ql = 0$$

$$M(y_2) = -17ql^2 + 2ql \cdot (2l + y_2) - 2ql \cdot y_2 = -13ql^2$$

$$N(y_2) = -3ql$$

Przedział EF $0 \leq x_3 < l$

$$T(x_3) = 0$$

$$M(x_3) = ql^2$$

$$N(x_3) = 0$$

Przedział CF $0 \leq x_4 < 4l$

$$T(x_4) = 3ql$$

$$M(x_4) = -3ql \cdot x_4$$

$$M(x_4 = 0) = 0 \quad M(x_4 = 4l) = -12ql^2$$

$$N(x_4) = 0$$

Przedział CG $0 \leq x_5 < 3l$

$$T(x_5) = 3ql - qx_5$$

$$T(x_5 = 0) = 3ql \quad T(x_5 = 3l) = 0$$

$$M(x_5) = 3ql \cdot x_5 - qx_5 \cdot \frac{x_5}{2} = 3ql \cdot x_5 - q \cdot \frac{(x_5)^2}{2}$$

$$M(x_5 = 0) = 0 \quad M\left(x_5 = \frac{3l}{2}\right) = \frac{27}{8}ql^2 \quad M(x_5 = 3l) = \frac{9}{2}ql^2$$

$$N(x_5) = 0$$

Przedział HG $0 \leq x_6 < 3l$

$$T(x_6) = qx_6$$

$$T(x_6 = 0) = 0 \quad T(x_6 = 3l) = 3ql$$

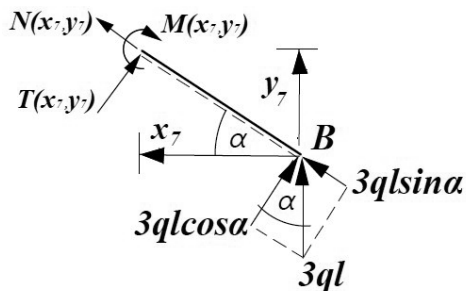
$$M(x_6) = -qx_6 \cdot \frac{x_6}{2} = -q \cdot \frac{(x_6)^2}{2}$$

$$M(x_6 = 0) = 0 \quad M\left(x_6 = \frac{3l}{2}\right) = -\frac{9}{8}ql^2 \quad M(x_6 = 3l) = -\frac{9}{2}ql^2$$

$$N(x_6) = 0$$

Przedział BG $0 \leq x_7 < 3l$, $0 \leq y_7 < 2l$

Układ sił działających w dowolnym przekroju przedziału BG przedstawiono na Rys.2.5.7.



Rys.2.5.7.

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \quad \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$T(x_7, y_7) = -3ql \cos \alpha = -3ql \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = -9 \frac{\sqrt{13}}{13} ql$$

$$M(x_7, y_7) = 3ql \cdot x_7$$

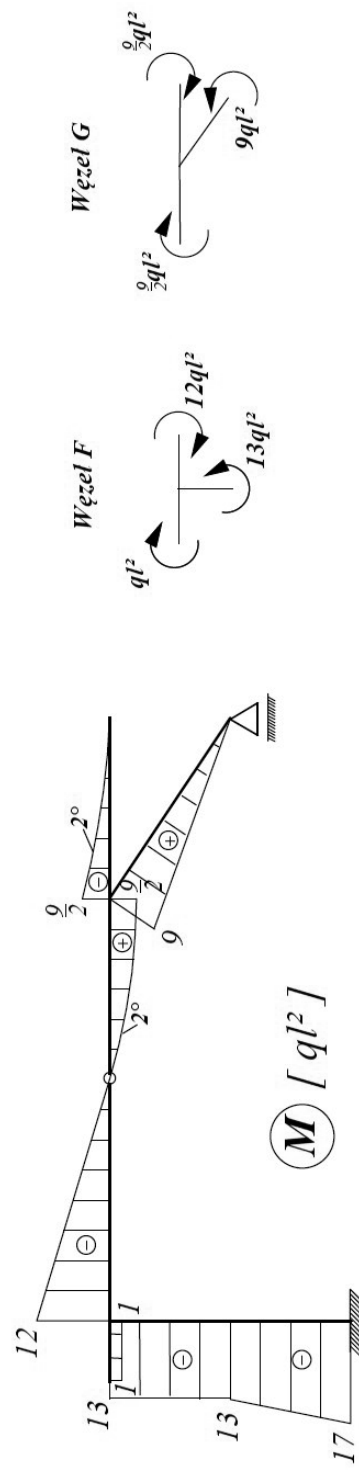
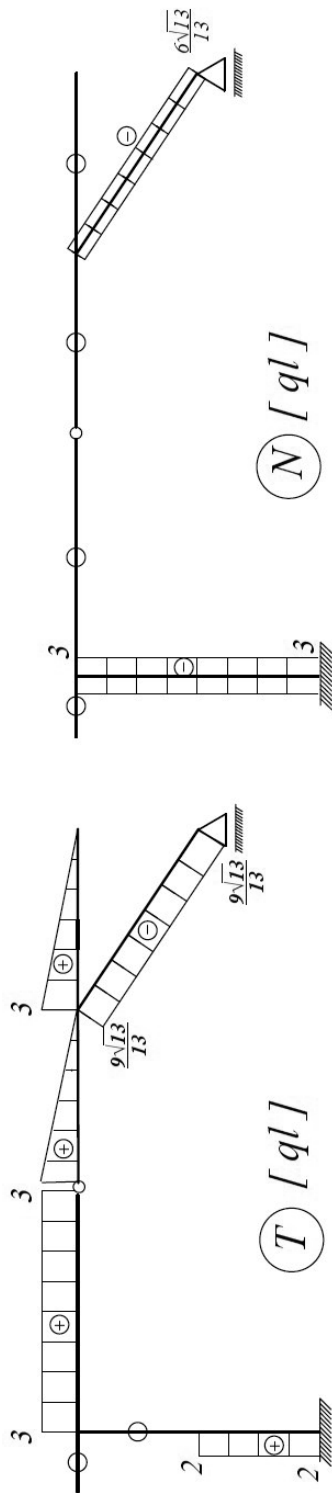
$$M(x_7 = 0, y_7 = 0) = 0$$

$$M(x_7 = 3l, y_7 = 2l) = 9ql^2$$

$$N(x_7, y_7) = -3ql \sin \alpha = -3ql \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = -6 \frac{\sqrt{13}}{13} ql$$

Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys. 2.5.8.

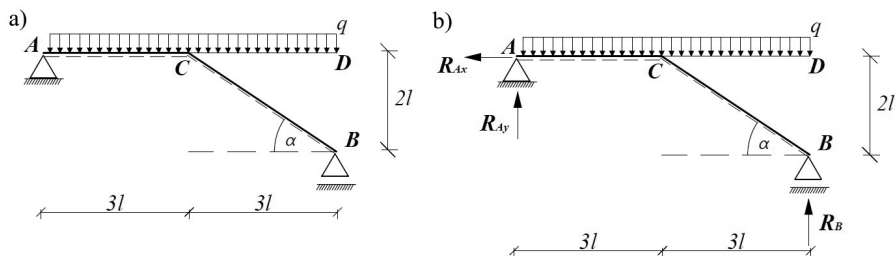
Poprawność analizy potwierdziła równowaga momentów w węzłach F i G ramy.



Rys.2.5.8.

Przykład 2.5.3.

Dla ramy przedstawionej Rys.2.5.9.a. sporządzić wykresy sił wewnętrznych.



Rys.2.5.9.

1. Stopień statycznej niewyznaczalności $n = 0$,

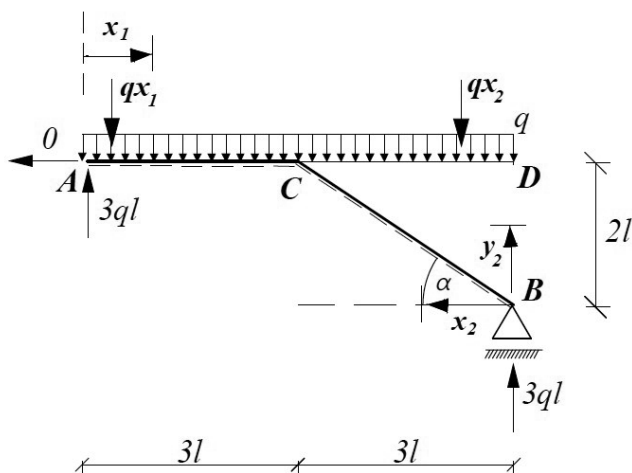
2. Obliczenie reakcji (Rys.2.5.9.b.):

$$\sum M_{(A)} = 0; \quad R_B \cdot 6l - 6ql \cdot 3l = 0 \quad R_B = 3ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_B - 6ql + R_{Ay} = 0 \quad R_{Ay} = 3ql$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} = 0$$

3. Równania sił wewnętrznych w poszczególnych przedziałach (Rys.2.5.10.).



Rys. 2.5.10.

Przedział AC $0 \leq x_1 < 3l$

$$T(x_1) = 3ql - qx_1$$

$$T(x_1 = 0) = 3ql \quad T(x_1 = 3l) = 0$$

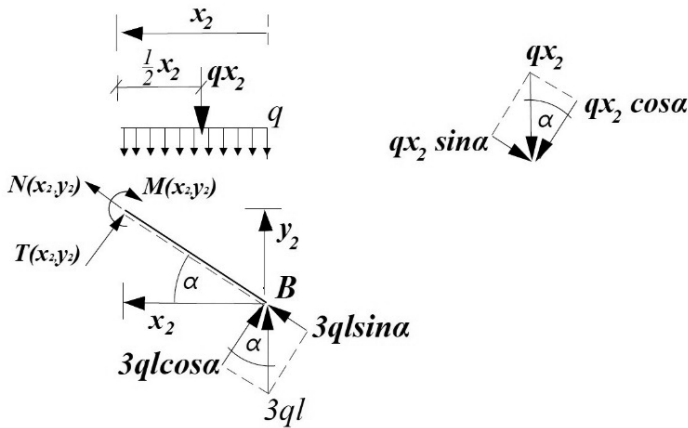
$$M(x_1) = 3ql \cdot x_1 - q \cdot \frac{(x_1)^2}{2}$$

$$M(x_1 = 0) = 0 \quad M\left(x_1 = \frac{3l}{2}\right) = \frac{27}{8}ql^2 \quad M(x_1 = 3l) = \frac{9}{2}ql^2$$

$$N(x_1) = 0$$

Przedział BC $0 \leq x_2 < 3l$, $0 \leq y_2 < 2l$

Układ sił działających w dowolnym przekroju przedziału BC przedstawiono na Rys.2.5.11.



Rys.2.5.11.

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \quad \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$T(x_2, y_2) = -3ql \cos \alpha + qx_2 \cos \alpha = (-3ql + qx_2) \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$T(x_2 = 0, y_2 = 0) = \frac{-9\sqrt{13}}{13} ql$$

$$T(x_2 = 3l, y_2 = 2l) = 0$$

$$M(x_2, y_2) = 3ql \cdot x_2 - qx_2 \cdot \frac{x_2}{2} = 3ql \cdot x_2 - q \cdot \frac{(x_2)^2}{2}$$

$$M(x_2 = 0, y_2 = 0) = 0 \quad M\left(x_2 = \frac{3l}{2}\right) = \frac{27}{8} ql^2$$

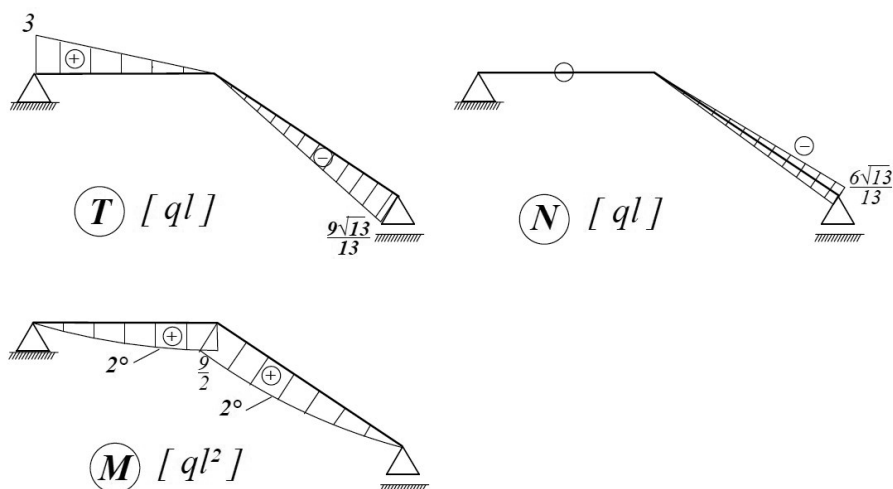
$$M(x_2 = 3l, y_2 = 2l) = \frac{9}{2} ql^2$$

$$N(x_2, y_2) = -3ql \sin \alpha + qx_2 \sin \alpha = (-3ql + qx_2) \cdot \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$N(x_2 = 0, y_2 = 0) = \frac{-6\sqrt{13}}{13} ql$$

$$N(x_2 = 3l, y_2 = 2l) = 0$$

Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys. 2.5.12.



Rys.2.5.12.

Przykład 2.5.4.

Dla ramy przedstawionej Rys.2.5.13. sporządzić wykresy sił wewnętrznych.

1. Stopień statycznej niewyznaczalności: $n = r + s - 3t = 3 + 6 - 3 \cdot 3 = 0$,
2. Obliczenie reakcji:

Reakcje podpór A i B wyznaczono z 3 ogólnych równań równowagi (Rys.2.5.13.a.).

$$\sum M_{(A)} = 0; \quad R_B \cdot 6l + ql \cdot \frac{l}{2} - ql \cdot l + 6ql^2 = 0 \quad R_B = -\frac{11}{12}ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_B + ql + R_{Ay} = 0 \quad R_{Ay} = -\frac{1}{12}ql$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} - ql = 0 \quad R_{Ax} = ql$$

Aby wyznaczyć siły w przegubie C oraz siłę w ściągu FG ramę podzielono na układy przedstawione na Rys.2.5.13.b. uwzględniając wzajemne oddziaływanie poszczególnych układów.

Siłę N w ściągu FG oraz siły w przegubie C wyznaczymy pisząc równania równowagi dla prawej (lub lewej) części ramy.

- rama prawa:

$$\sum M_{(C)} = 0; \quad R_B \cdot 2l - ql \cdot \frac{5l}{2} + N \cdot 2l = 0 \quad N = \frac{13}{6}ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_B + R_{Cy} = 0 \quad R_{Cy} = \frac{11}{12}ql$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -R_{Cx} + N - ql = 0 \quad R_{Cx} = \frac{7}{6}ql$$

3. Równania sił wewnętrznych w poszczególnych przedziałach.

Na Rys.2.5.14. przedstawiono układ sił czynnych i biernych działających na analizowaną ramę.

Przedział AF $0 \leq y_1 < l$

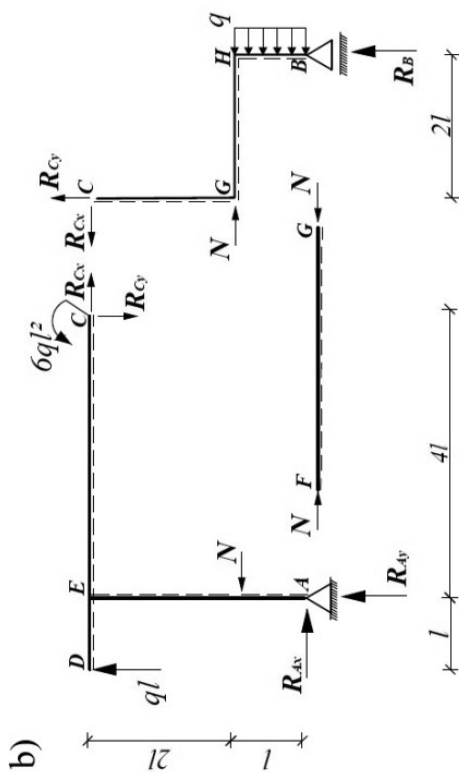
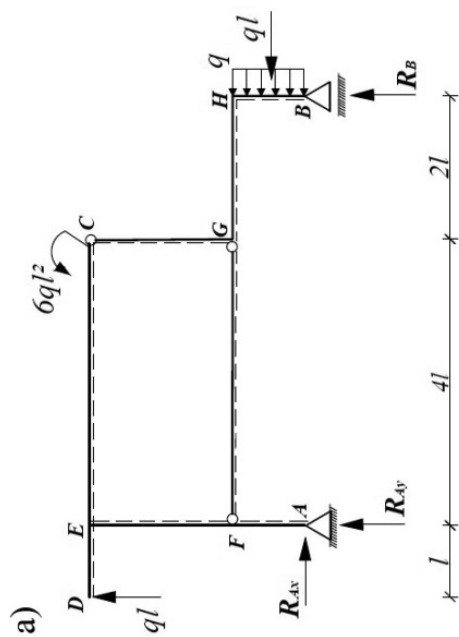
$$T(y_1) = -ql$$

$$M(y_1) = -ql \cdot y_1$$

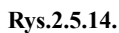
$$M(y_1 = 0) = 0$$

$$M(y_1 = l) = -ql^2$$

$$N(y_1) = \frac{1}{12}ql$$



Rys.2.5.13.


$$T(y_2) = -ql + \frac{13}{6}ql = \frac{7}{6}ql$$

$$M(y_2) = -ql \cdot (l + y_2) + \frac{13}{6} ql \cdot y_2$$

$$M(y_2 = 0) = -ql^2$$

$$M(y_2 = 2l) = \frac{4}{3}ql^2$$

$$N(y_2) = \frac{1}{12}ql$$

Przedział BH $0 \leq y_3 < l$

$$T(y_3) = qy_3$$

$$T(y_3 = 0) = 0$$

$$T(y_3 = l) = q \cdot l = ql$$

$$M(y_3) = -qy_3 \cdot \frac{y_3}{2} = -q \cdot \frac{(y_3)^2}{2}$$

$$M(y_3 = 0) = 0$$

$$M\left(y_3 = \frac{l}{2}\right) = -q \cdot \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = -\frac{1}{8}ql^2$$

$$M(y_3 = l) = -q \cdot \frac{(l)^2}{2} = -\frac{1}{2}ql^2$$

$$N(y_3) = \frac{11}{12}ql$$

Przedział CG $0 \leq y_4 < 2l$

$$T(y_4) = -\frac{7}{6}ql$$

$$M(y_4) = -\frac{7}{6}ql \cdot y_4$$

$$M(y_4 = 0) = 0$$

$$M(y_4 = 2l) = -\frac{7}{3}ql^2$$

$$N(y_4) = \frac{11}{12}ql$$

Przedział DE $0 \leq x_5 < l$

$$T(x_5) = ql$$

$$M(x_5) = ql \cdot x_5$$

$$M(x_5 = 0) = 0$$

$$M(x_5 = l) = ql^2$$

$$N(x_5) = 0$$

Przedział CE $0 \leq x_6 < 4l$

$$T(x_6) = \frac{11}{12}ql$$

$$M(x_6) = 6ql^2 - \frac{11}{12}ql \cdot x_6$$

$$M(x_6 = 0) = 6ql^2$$

$$M(x_6 = 4l) = \frac{7}{3}ql^2$$

$$N(x_6) = \frac{7}{6}ql$$

Przedział HG $0 \leq x_7 < 2l$

$$T(x_7) = \frac{11}{12}ql$$

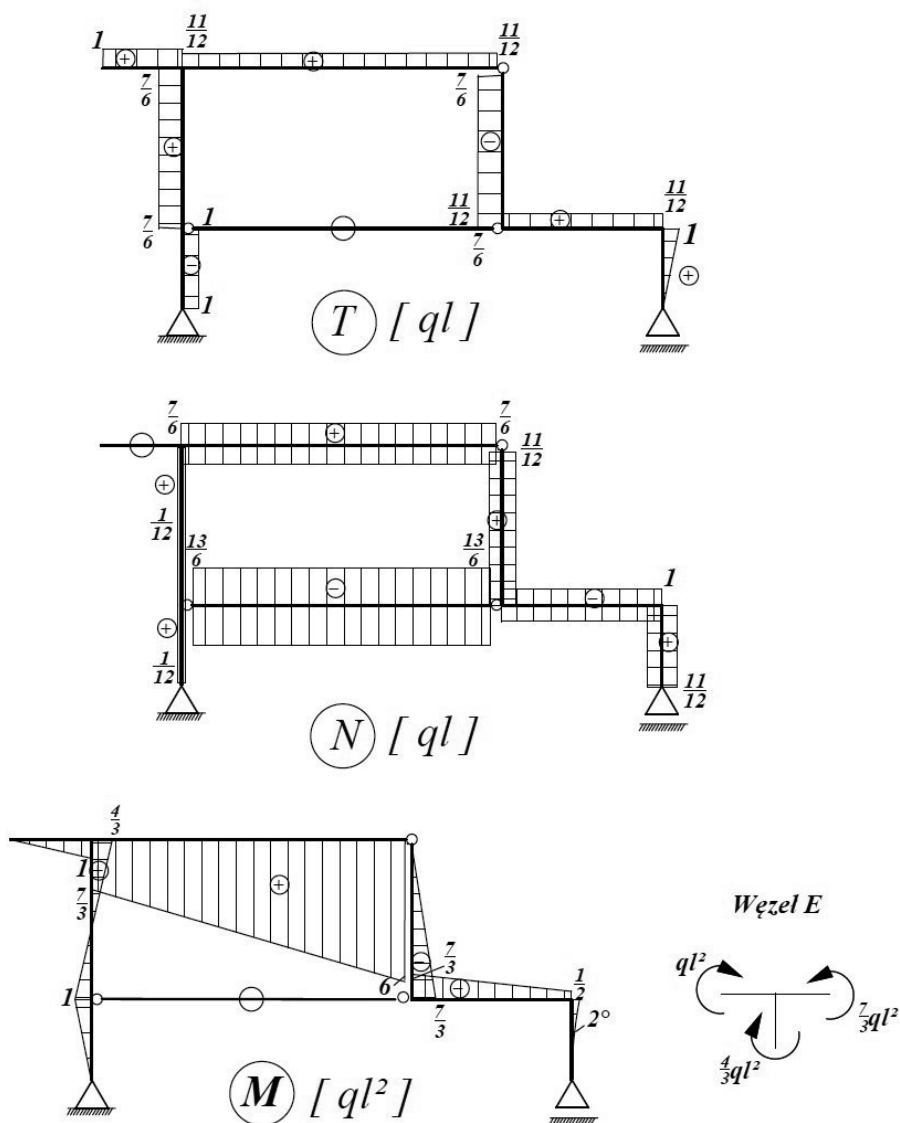
$$M(x_7) = -\frac{11}{12}ql \cdot x_7 - ql \cdot \frac{1}{2}l$$

$$M(x_7 = 0) = -\frac{1}{2}ql^2 \qquad M(x_7 = 2l) = -\frac{7}{3}ql^2$$

$$N(x_7) = -ql$$

Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys. 2.5.15.

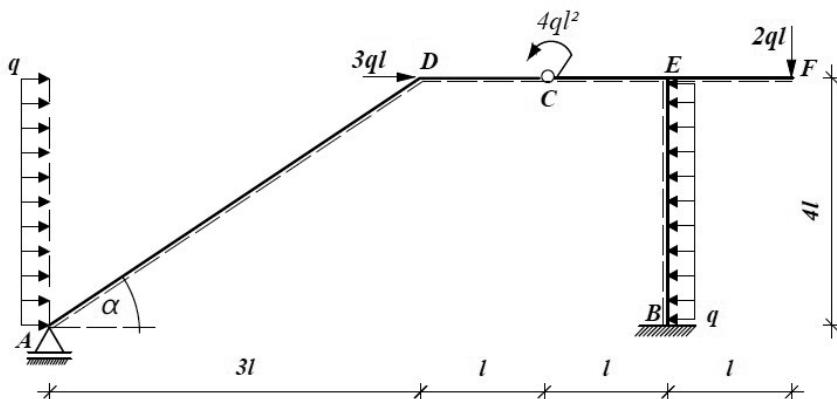
Poprawność analizy potwierdziła równowaga momentów w węźle E ramy.



Rys. 2.5.15.

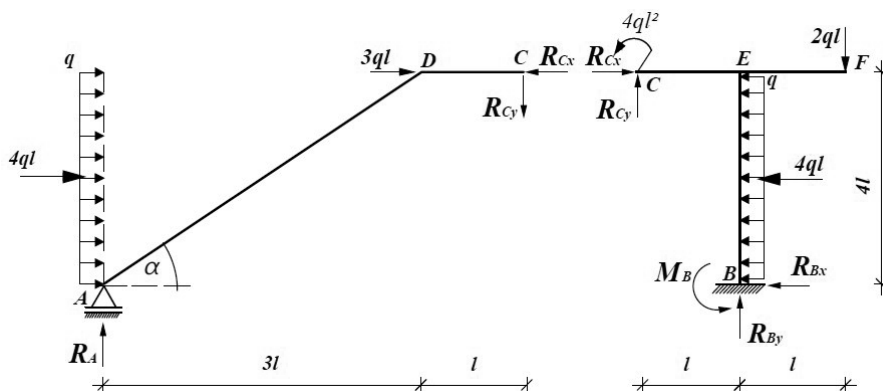
Przykład 2.5.5.

Dla ramy przedstawionej Rys. 2.5.16. sporządzić wykresy sił wewnętrznych.



Rys.2.5.16.

1. Stopień statycznej niewyznaczalności $n = r + s - 3t = 4 + 2 - 3 \cdot 2 = 0$,
2. Obliczenie reakcji:



Rys.2.5.17.

Ramę złożoną przedstawioną na Rys. 2.5.16. rozdzielono w przegubie C na dwie ramy proste uwzględniając ich wzajemne oddziaływanie (Rys.2.5.17.).

- rama lewa:

$$\sum M_{(C)} = 0; \quad R_A \cdot 4l - 4ql \cdot 2l = 0 \quad R_A = 2ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_A - R_{Cy} = 0 \quad R_{Cy} = 2ql$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad 3ql + 4ql - R_{Cx} = 0 \quad R_{Cx} = 7ql$$

- rama prawa:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{By} - 2ql + R_{Cy} = 0 \quad R_{By} = 0$$

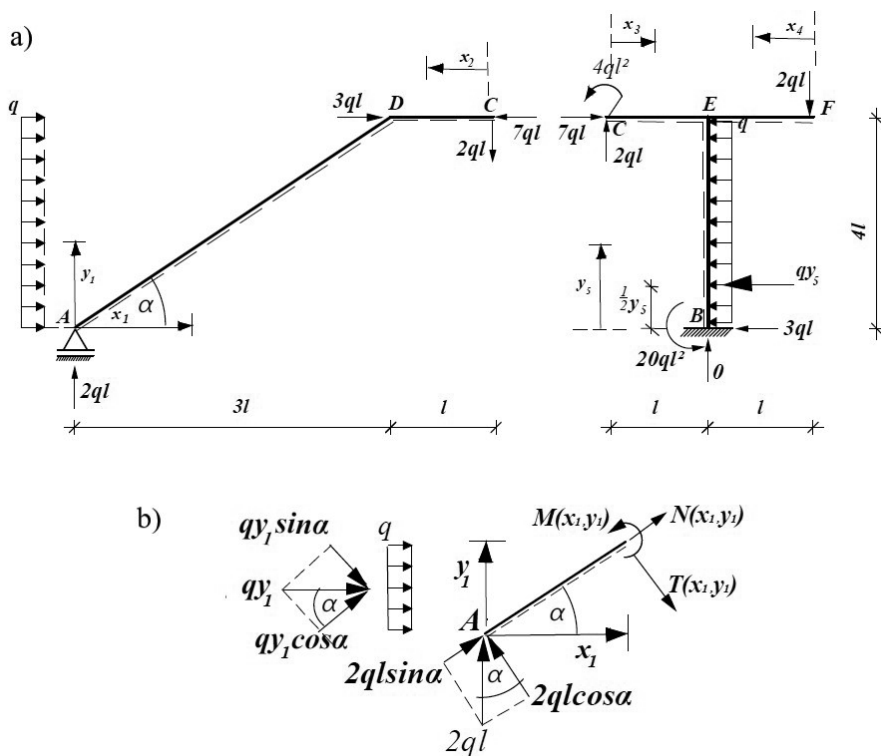
$$\sum M_{(B)} = 0; \quad M_B - R_{Cy} \cdot l + 4ql^2 - R_{Cx} \cdot 4l - 2ql \cdot l + 4ql \cdot 2l = 0$$

$$M_B = 20 ql^2$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Cx} - 4ql - R_{Bx} = 0 \quad R_{Bx} = 3ql$$

3. Równania sił wewnętrznych w poszczególnych przedziałach.

Na Rys.2.5.18.a. przedstawiono układ sił czynnych i biernych działających na analizowaną ramę.



Rys.2.5.18.

Przedział AD $0 \leq x_1 < 3l$, $0 \leq y_1 < 4l$

Układ sił działających w dowolnym przekroju przedziału AD przedstawiono na Rys.2.5.18.b.

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin\alpha = \frac{4}{5}$$

$$T(x_1, y_1) = 2ql\cos\alpha - qy_1\sin\alpha = 2ql\frac{3}{5} - qy_1\frac{4}{5}$$

$$T(x_1, y_1) = 0 \rightarrow 2ql\frac{3}{5} - qy_1\frac{4}{5} = 0 \rightarrow y_1 = \frac{3}{2}l \rightarrow x_1 = \frac{3}{4}y_1 = \frac{9}{8}l$$

$$T(x_1 = 0, y_1 = 0) = \frac{6}{5}ql \quad T(x_1 = 3l, y_1 = 4l) = -2ql$$

$$M(x_1, y_1) = 2ql \cdot x_1 - qy_1 \cdot \frac{y_1}{2} = 2ql \cdot x_1 - q \cdot \frac{(y_1)^2}{2}$$

$$M(x_1 = 0, y_1 = 0) = 0 \quad M(x_1 = 3l, y_1 = 4l) = -2ql^2$$

$$M\left(x_1 = \frac{9}{8}l, y_1 = \frac{3}{2}l\right) = \frac{9}{8}ql^2$$

$$N(x_1, y_1) = -2ql\sin\alpha - qy_1\cos\alpha = -2ql \cdot \frac{4}{5} - qy_1\frac{3}{5}$$

$$N(x_1 = 0, y_1 = 0) = -\frac{8}{5}ql \quad N(x_1 = 3l, y_1 = 4l) = -4ql$$

Przedział CD $0 \leq x_2 < l$

$$T(x_2) = 2ql$$

$$M(x_2) = -2ql \cdot x_2$$

$$M(x_2 = 0) = 0 \quad M(x_2 = l) = -2ql^2$$

$$N(x_2) = -7ql$$

Przedział CE $0 \leq x_3 < l$

$$T(x_3) = 2ql$$

$$M(x_3) = 2ql \cdot x_3 - 4ql^2$$

$$M(x_3 = 0) = -4ql^2 \quad M(x_3 = l) = -2ql^2$$

$$N(x_3) = -7ql$$

Przedział FE $0 \leq x_4 < l$

$$T(x_4) = 2ql$$

$$M(x_4) = -2ql \cdot x_4$$

$$M(x_4 = 0) = 0 \quad M(x_4 = l) = -2ql^2$$

$$N(x_4) = 0$$

Przedział BE $0 \leq y_5 < 4l$

$$T(y_5) = 3ql + qy_5$$

$$T(y_5 = 0) = 3ql$$

$$T(y_5 = 4l) = 7ql$$

$$M(y_5) = 20ql^2 - 3ql \cdot y_5 - qy_5 \cdot \frac{y_5}{2} = 20ql^2 - 3ql \cdot y_5 - q \cdot \frac{(y_5)^2}{2}$$

$$M(y_5 = 0) = 20ql^2$$

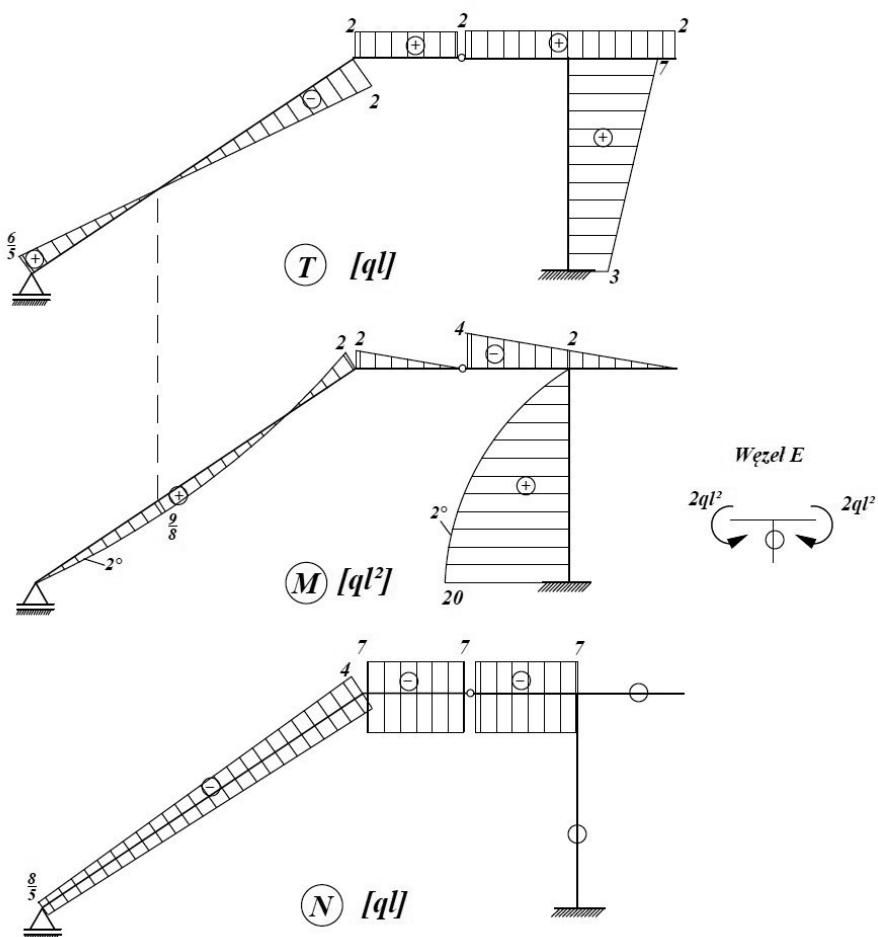
$$M(y_5 = 2l) = 12ql^2$$

$$M(y_5 = 4l) = 0$$

$$N(y_5) = 0$$

Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys. 2.5.19.

Poprawność analizy potwierdziła równowaga momentów w węźle E ramy.



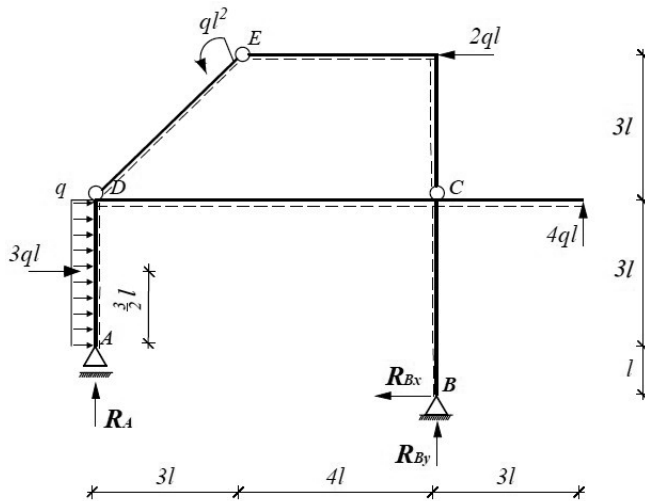
Rys.2.5.19.

Przykład 2.5.6.

Dla ramy przedstawionej Rys. 2.5.20. sporządzić wykresy sił wewnętrznych.

1. Stopień statycznej niewyznaczalności: $n = r + s - 3t = 3 + 6 - 3 \cdot 3 = 0$,
2. Obliczenie reakcji:

Reakcje podpór A i B wyznaczono z 3 równań równowagi (Rys.2.5.20.).



Rys.2.5.20.

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -R_{Bx} - 2ql + 3ql = 0 \quad R_{Bx} = ql$$

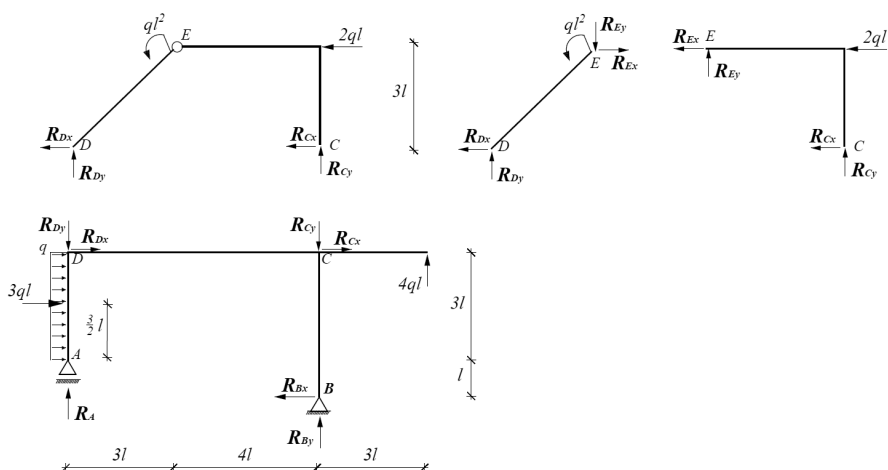
$$\sum M_{(A)} = 0;$$

$$R_{By} \cdot 7l + 4ql \cdot 10l + 2ql \cdot 6l - 3ql \cdot \frac{3}{2}l + ql^2 - R_{Bx} \cdot l = 0$$

$$R_{By} = -\frac{95}{14}ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{By} + 4ql + R_A = 0 \quad R_A = \frac{39}{14}ql$$

Siły w przegubach C, D oraz E wyznaczono dzieląc ramę na elementy przedstawione na Rys.2.5.21., uwzględniając ich wzajemne oddziaływania.



Rys.2.5.21.

- rama DCE:

$$\sum M_{(D)} = 0; \quad R_{Cy} \cdot 7l + 2ql \cdot 3l + ql^2 = 0 \quad R_{Cy} = -ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{Dy} + R_{Cy} = 0 \quad R_{Dy} = ql$$

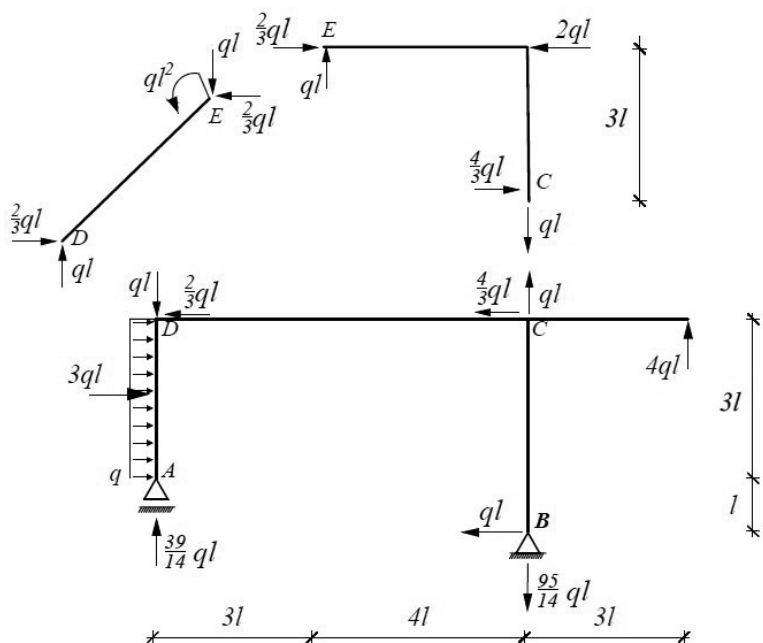
$$\sum M_E^P = 0; \quad R_{Cy} \cdot 4l - R_{Cx} \cdot 3l = 0 \quad R_{Cx} = -\frac{4}{3}ql$$

$$\sum F_{iy}^P = 0; \quad R_{Ey} + R_{Cy} = 0 \quad R_{Ey} = ql$$

$$\sum F_{ix}^P = 0; \quad -R_{Cx} - R_{Ex} - 2ql = 0 \quad R_{Ex} = -\frac{2}{3}ql$$

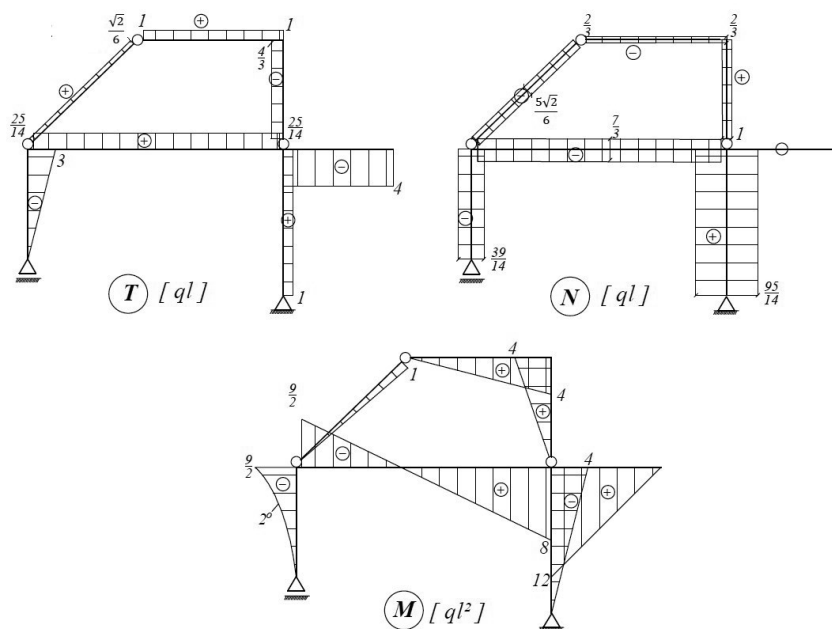
$$\sum F_{ix} = 0; \quad -R_{Cx} - R_{Dx} - 2ql = 0 \quad R_{Dx} = -\frac{2}{3}ql$$

Na Rys.2.5.22. przedstawiono układ sił czynnych i biernych działających na analizowaną ramę.



Rys.2.5.22.

Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys. 2.5.23.

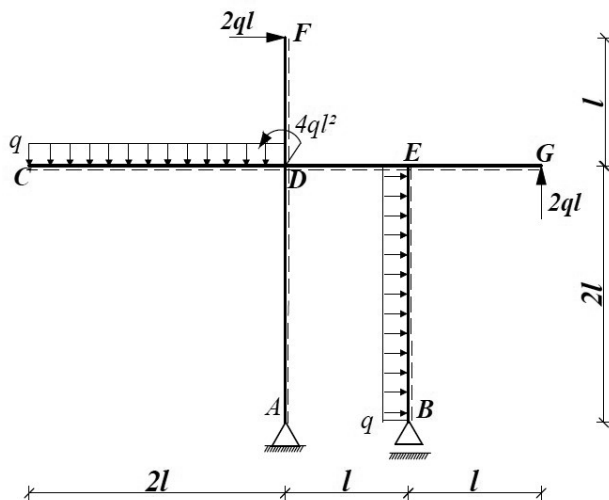


Rys.2.5.23.

2.5.2. Ramy – zadania do samodzielnego rozwiązania

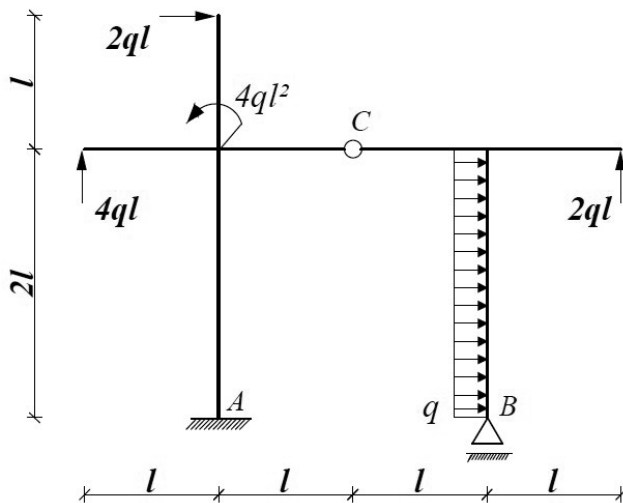
Dla ram przedstawionych poniżej sporządzić wykresy sił wewnętrznych.

a)



Rys.2.5.24.

b)



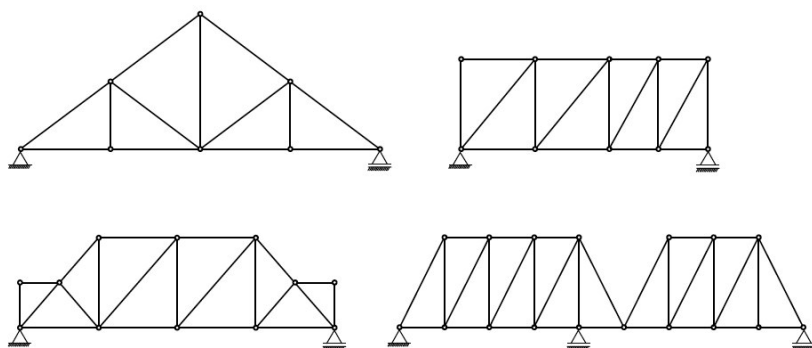
Rys.2.5.25.

2.6. Kratownice płaskie [1],[2],[3]

Kratownica – układ prętów połączonych przegubami w węzłach mający niezmienną geometrycznie postać (Rys.2.6.1.). Pręty są prostoliniowe a obciążenia działają na kratownice tylko w węzłach w postaci sił skupionych.

Założenie przegubowego połączenia prętów jest wyidealizowane (oznacza ono, że końce prętów mogą się względem siebie obracać). W rzeczywistych rozwiązaniach konstrukcyjnych, w większości przypadków, kratownice stanowią dźwigary kratowe o sztywnych węzłach. Założenie przegubowego połączenia prętów znacznie upraszcza „ręczne” rozwiązywanie kratownic, nie wprowadzając jednak większych błędów.

Ponieważ w układach kratowych materiał jest lepiej wykorzystany niż w belkach pełnościennych, to kratownice stosuje się często w konstrukcjach o dużych rozpiętościach (jako dźwigary mostowe, dźwigary hal czy podciąg).



Rys. 2.6.1. Kratownice płaskie

Geometryczna niezmienność i statyczna wyznaczalność kratownic:

Większość kratownic utworzonych jest z prętów (tarcz) połączonych ze sobą w trójkąty.

Twierdzenie o trzech tarczach: *układ złożony z trzech tarcz, w których każda para połączona jest za pomocą przegubu (dwóch łączników elementarnych), tworzy jedną tarczę jeżeli środki wzajemnego obrotu tych tarcz nie leżą na jednej prostej (tworzą trójkąt).*

Ponieważ trzy pręty połączone ze sobą przegubowo w trójkąt tworzą układ geometrycznie niezmienny, to i kratownica utworzona z prętów połączonych w trójkąty będzie również układem geometrycznie niezmiennym.

Stosowanie wzoru ogólnego $r + s = 3t$ w ustalaniu warunków statycznej wyznaczalności kratownic jest uciążliwe ze względu na dużą liczbę przegubów wielokrotnych, łączących ze sobą poszczególne pręty kratownicy traktowane jako tarcze.

Jeżeli kratownica jako całość znajduje się w równowadze pod działaniem sił zewnętrznych, to i każdy jej węzeł musi być w równowadze pod wpływem działających nań sił czynnych (sił zewnętrznych) oraz sił biernych (oddziaływań ze strony zbiegających się w nim prętów i reakcji podpór).

W każdym węźle występuje zbieżny układ sił, dla którego możemy utworzyć dwa równania równowagi:

$$\sum F_{ix} = 0 \quad \text{ i } \quad \sum F_{iy} = 0 \quad (2.4)$$

Dla w węzłów kratownicy możemy ułożyć $2w$ równań równowagi, które będą zawierały siły zewnętrzne, siły podłużne w prętach oraz składowe reakcji podpór. Jeżeli z tych równań równowagi jesteśmy w stanie obliczyć siły podłużne we wszystkich prętach kratownicy oraz składowe reakcji podpór to mówimy, że kratownica jest statycznie wyznaczalna.

Stopień statycznej niewyznaczalności kratownicy można, w związku z powyższym, wyznaczyć ze wzoru:

$$n = p + r - 2w \quad (2.5)$$

gdzie: p – liczba prętów kratownicy,

r – liczba reakcji podpór,

w – liczba węzłów kratownicy (łącznie z węzłami podporowymi),

n – stopień statycznej niewyznaczalności kratownicy.

Jeżeli:

$n = 0$ - kratownica jest statycznie wyznaczalna,

$n < 0$ - kratownica jest geometrycznie zmienna (mechanizm),

$n > 0$ - kratownica jest statycznie niewyznaczalna.

Analityczne metody wyznaczania sił w prętach kratownicy

Składowe reakcji podpór kratownicy, traktowanej jako geometrycznie niezmienna tarcza, można wyznaczyć analogicznie jak dla tak samo podpartych układów belkowych.

Siłami wewnętrznymi w kratownicy są siły podłużne w jej prętach. Kierunki poszukiwanych sił podłużnych są znane (wzdłuż osi pręta), zaś ich zwroty można zakładać dowolnie. Najwygodniej jednak jest przyjmować zwroty od węzła do pomyślanego przekroju (odpowiada to rozciąganiu). Przy takim założeniu siły rozciągające otrzymamy ze znakiem „+”, ściskające zaś ze znakiem „-”.

W celu wyznaczenia sił w prętach kratownicy najczęściej stosuje się następujące dwie metody analityczne:

- a) metoda równoważenia węzłów – polega na myślowym wycinaniu poszczególnych węzłów kratownicy i układaniu dwóch równań równowagi sił działających na rozpatrywany węzeł (Rys.2.6.2.),
- b) metoda przekrojów (Rittera) – polega na myślowym rozcięciu kratownicy na dwie części i ułożeniu równań równowagi wszystkich sił działających na jedną z wyciętych części (Rys.2.6.3.).

- *Metoda równoważenia węzłów* [1],[3]

Dla każdej statycznie wyznaczalnej kratownicy, analizując równowagę wyodrębnionych węzłów (w każdym węźle mamy płaski zbieżny układ sił), możemy napisać $2w$ równań, z których wyznaczymy p sił w prętach oraz r składowych reakcji podpór. Ponieważ „ręczne” rozwiązywanie układów złożonych z wielu równań jest uciążliwe, dlatego też przy rozwiązywaniu układów kratowych najczęściej wyznaczamy najpierw składowe reakcje podpór z trzech równań równowagi, zastosowanych do całej kratownicy, a następnie, zaczynając od węzła, w którym mamy tylko dwie niewiadome siły, obliczamy kolejno siły w prętach korzystając z równań równowagi poszczególnych węzłów. Równowaga sił w ostatnim węźle jest sprawdzeniem poprawności rozwiązania.

Sposób postępowania wyjaśniono na przykładzie kratownicy pokazanej na Rys.2.6.2.a., dla której $w = 8$, $p = 13$ i $r = 3$, ($n = 13 + 3 - 2 \cdot 8 = 0$).

Składowe reakcje podpór wyznaczymy z 3 równań typu:

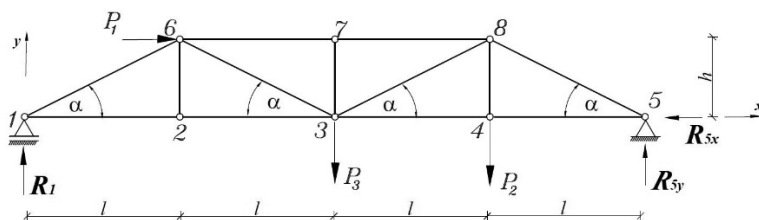
$$\sum M_5 = 0, \quad \sum F_{iy} = 0 \quad \text{oraz} \quad \sum F_{ix} = 0. \quad (2.6)$$

Następnie wycinamy myślowo poszczególne węzły (Rys.2.6.2.b.) i dla każdego węzła piszemy równania równowagi, zaczynając od tego, w którym są co najwyżej dwie niewiadome,:

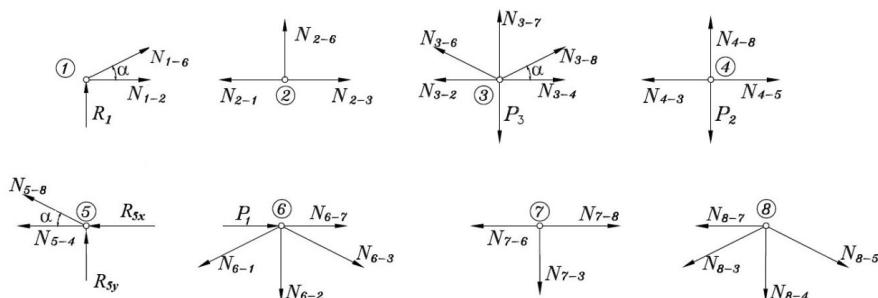
$$\sum F_{ix} = 0 \quad \sum F_{iy} = 0 \quad (2.7)$$

Założone zwroty sił działających na węzły (Rys.2.6.2.b.) odpowiadają rozciąganiu pręta.

a)



b)



Rys.2.6.2 Kratownica płaska – metoda równoważenia węzłów

Wyznaczanie niewiadomych sił w prętach kratownicy rozpoczynamy od węzła 1 lub węzła 5, ponieważ zbiegają się w nich tylko dwa pręty (mamy dwie niewiadome w węźle). Jeżeli zaczniemy od węzła 1 to wyznaczamy z dwóch równań równowagi siły w prętach (1-2) i (1-6). Następnie przechodzimy do kolejnego węzła, w którym występują tylko dwie nieznanne siły, czyli do węzła 2 itd.

Ponieważ omawiana kratownica posiada 8 węzłów, a dla każdego węzła możemy utworzyć dwa równania równowagi, to dla całej kratownicy mamy łącznie 16 równań równowagi. Jednakże, jak wspomniano powyżej, reakcje podpór R_1 , R_{5x} oraz R_{5y} wyznaczono z trzech równań równowagi zastosowanych do całej kratownicy. W związku z tym do wyznaczenia 13 sił w prętach wystarczy 13 równań równowagi w węzłach. Równania 14 (węzeł 8) oraz 15 i 16 (węzeł 5) mogą posłużyć jako sprawdzenie poprawności rozwiązania.

Metodę równoważenia węzłów stosujemy zazwyczaj wtedy, gdy musimy wyznaczyć siły we wszystkich prętach kratownicy oraz gdy w kratownicy jest przynajmniej jeden węzeł, w którym zbiegają się tylko dwa pręty. Czasami można zacząć obliczanie od węzła, w którym zbiegają się trzy pręty, a dwa z nich leżą na jednej prostej.

- *Metoda Rittera (metoda przekrojów)* [1],[3]

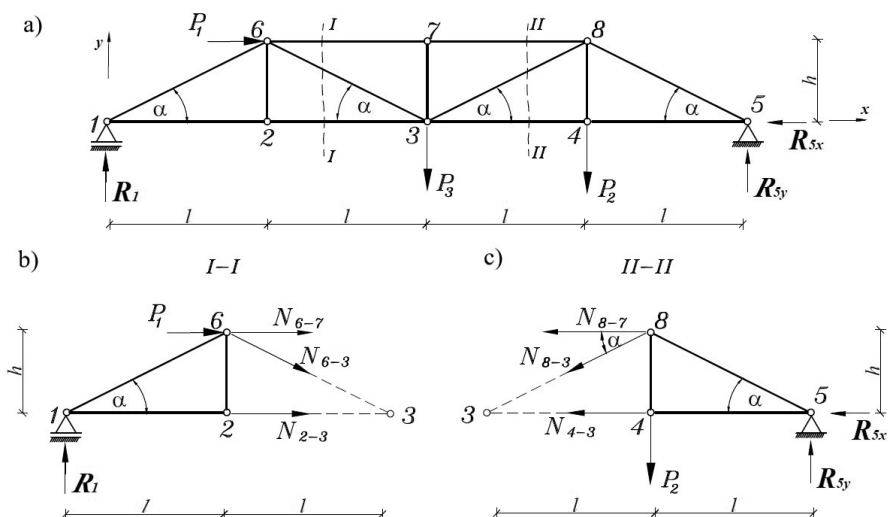
Metoda ta polega na niezależnym wyznaczeniu siły w dowolnym przecię kratownicy z równania równowagi, zawierającego jedną niewiadomą (Rys.2.6.3).

W metodzie Rittera wyznaczamy najpierw składowe reakcji podpór z trzech równań równowagi zastosowanych do całej kratownicy, a następnie prowadzimy myślowo przekrój przez maksymalnie trzy pręty, w których chcemy wyznaczyć siły. W kolejnym etapie rozpatrujemy równowagę jednej z części kratownicy, zwykle tej, na którą działa mniejsza liczba sił.

Stąd też, w celu wyznaczenia sił w prętach 6-7, 2-3 i 6-3 w kratownicy pokazanej na Rys.2.6.3.a. prowadzimy przez te pręty przekrój I-I.

Siły w przeciętych prętach znajdziemy wykorzystując warunki równowagi jednej z odciętych części kratownicy (Rys.2.6.3.b.). Kierunki poszukiwanych sił 6-7 i 6-3 przecinają się w punkcie 6 zaś sił 2-3 i 6-3 w punkcie 3 (Rys.2.6.3.b). Stosując zatem równania równowagi będące sumą momentów wszystkich sił, działających na rozpatrywaną część kratownicy, względem punktu 6 i 3 otrzymujemy za każdym razem równanie z jedną niewiadomą (punkty 6 i 3 są to tzw. punkty Rittera).

Ponieważ w rozpatrywanym przykładzie dwa z przeciętych prętów są równoległe do siebie, to trzeciego punktu Rittera nie znajdziemy. W takim przypadku siłę w przecię 6-3 znajdziemy pisząc równanie sumy rzutów sił na oś prostopadłą do kierunku prętów równoległych.



Rys.2.6.3. Kratownica płaska – metoda Rittera

$$\sum M_6 = 0 \quad N_{2-3}h - R_1l = 0 \quad \rightarrow \quad N_{2-3} = \frac{R_1l}{h}$$

$$\sum M_3 = 0 \quad -N_{6-7}h - R_1 \cdot 2l - P_1h = 0 \quad \rightarrow \quad N_{6-7} = -\frac{R_1 2l + P_1h}{h}$$

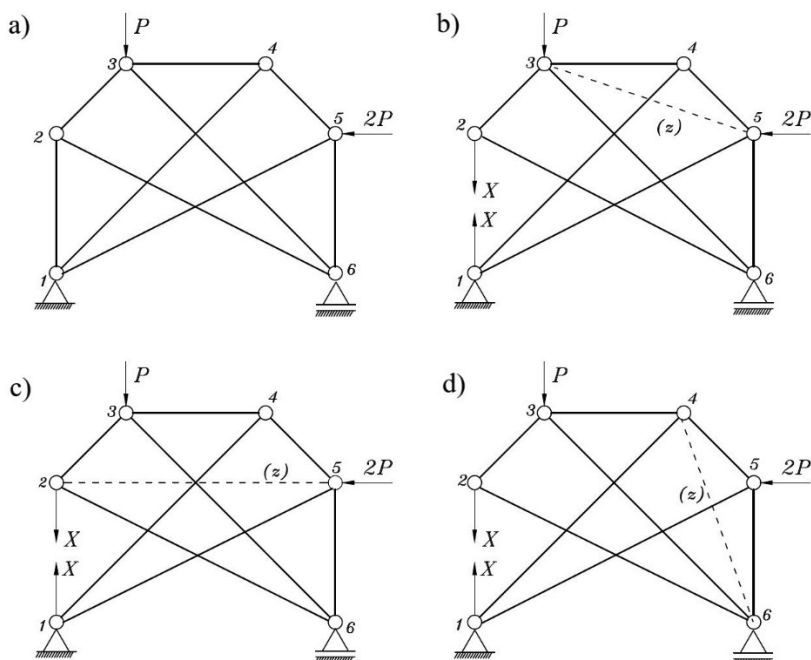
$$\sum F_{iy} = 0 \quad -N_{6-3} \cdot \sin \alpha + R_1 = 0 \quad \rightarrow \quad N_{6-3} = \frac{R_1}{\sin \alpha}$$

Analogicznie wyznaczmy siły w prętach 8-7, 8-3, 4-3 przecinając kratownicę przekrojem II-II (Rys. 2.6.3.c.)

W szczególnych przypadkach możemy mieć do czynienia ze statycznie wyznaczalnymi kratownicami złożonymi, dla których zastosowanie metody równoważenia węzłów czy metody Rittera jest bardzo uciążliwe. Wówczas zastosowanie znajduje metoda wymiany prętów Henneberga.

- *Metoda wymiany prętów Henneberga* [2]

Metodę tę stosujemy wtedy gdy nie można poprowadzić przekroju przez co najwyżej trzy pręty i gdy w węzłach zbiega się więcej niż 2 pręty (Rys.2.6.4.a.).



Rys.2.6.4. Sposoby przekształcania kratownicy w kratownicę o prostszej strukturze przy zachowaniu niezmienności geometrycznej ustroju

Istota tej metody polega na takim przekształceniu kratownicy aby uzyskała ona strukturę prostą przy zachowaniu niezmienności geometrycznej ustroju. Dzięki temu możliwe będzie dalsze rozwiązanie kratownicy znanymi sposobami. W tym celu usuwamy jeden z prętów (pręt 1-2) a w celu zachowania niezmienności geometrycznej wprowadzamy pręt zastępczy (z), Rys.2.6.4.b.c.d.

Oddziaływanie usuniętego pręta na sąsiednie węzły zastępujemy nieznanymi na razie siłami X. Zmodyfikowaną w ten sposób kratownicę rozwiązujemy najpierw dla danego obciążenia zewnętrznego a następnie dla sił jednostkowych zaczepionych w miejscu usuniętego pręta ($X=1$).

Stosując zasadę superpozycji siłę w dowolnym przęcie układu wyznaczamy ze wzoru:

$$N^i = N_{X=1}^i X + N_p^i$$

gdzie:

$N_{X=1}^i$ – siła w dowolnym przęcie „i” wywołana siłą $X=1$ w układzie przekształconym,

N_p^i – siła w dowolnym pręcie „i” w układzie przekształconym wywołana obciążeniem zewnętrznym P,

X – siła w usuniętym pręcie.

Ponieważ pręt zastępczy w układzie pierwotnym nie istnieje to siła w tym pręcie wywołana siłą X oraz obciążeniem zewnętrznym P musi być równa zero.

$$N^z = N_{X=1}^z X + N_p^z = 0$$

stąd wyznaczamy siłę X, która jest rzeczywistą siłą w usuniętym pręcie:

$$X = -\frac{N_p^z}{N_{X=1}^z}$$

Znając siłę X, siły w pozostałych prętach kratownicy możemy wyznaczyć z równania:

$$N^i = N_{X=1}^i X + N_p^i$$

Znając siłę w pręcie 1-2, siły w pozostałych prętach kratownicy możemy także wyznaczyć metodą Rittera lub równoważenia węzłów.

Pręty zerowe

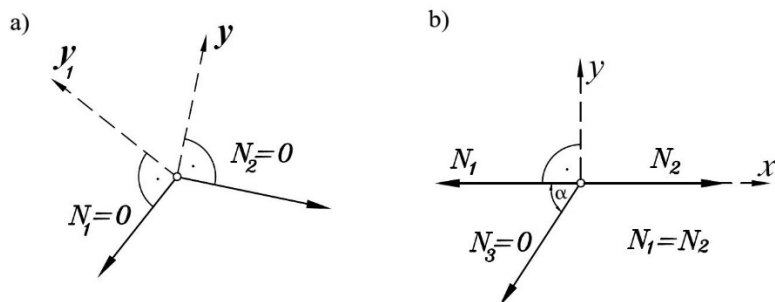
Niektóre pręty przy określonym obciążeniu kratownicy nie pracują. Siły w nich równe są zero – stąd nazwano je prętami zerowymi. Pręty te są jednak w kratownicy niezbędne do zapewnienia niezmienności geometrycznej czy zachowania kształtu.

W celu ułatwienia wyznaczania sił w prętach kratownicy wskazane jest aby przed przystąpieniem do obliczeń wyszukać takie pręty. Badając równowagę wyodrębnionych węzłów i rzutując siły na odpowiednie osie bez trudu można rozpoznać pręty niepracujące.

Na Rys.2.6.5. przedstawiono kilka charakterystycznych przypadków:

- w węźle nieobciążonym schodzą się tylko dwa pręty o różnych kierunkach. Z warunku równowagi dwóch sił widzimy, że siły w nich są równe zero $\sum F_{iy_1} = 0 \rightarrow N_2 = 0$ oraz $\sum F_{iy} = 0 \rightarrow N_1 = 0$ (Rys.2.6.5.a).

- w węźle nieobciążonym zbiegają się trzy pręty, z których dwa leżą na jednej prostej. Siła w trzecim pręcie równa się zero, co wynika z równania sumy rzutów sił na oś do niej prostopadłą $\Sigma F_{iy} = 0 \rightarrow N_3 = 0$ (Rys.2.6.5.b).

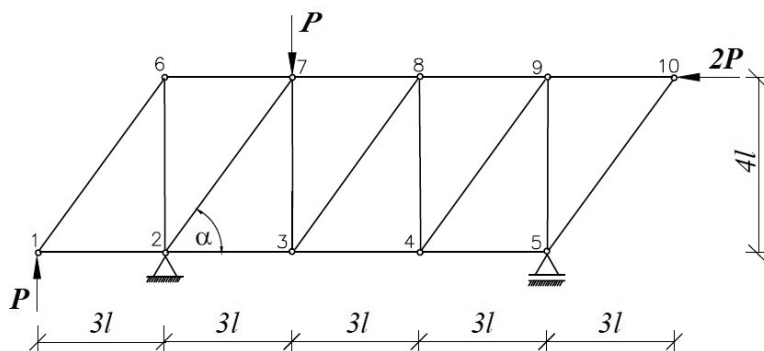


Rys.2.6.5. Pręty zerowe

2.6.1. Przykłady obliczeniowe – kratownice

Przykład 2.6.1.

Wyznaczyć siły w prętach kratownicy przedstawionej na Rys.2.6.6. metodą równoważenia węzłów.



Rys.2.6.6.

Rozwiązanie:

Stopień statycznej niewyznaczalności rozpatrywanej kratownicy wyznaczmy ze wzoru:

$$n = r + p - 2w = 3 + 17 - 2 \cdot 10 = 0$$

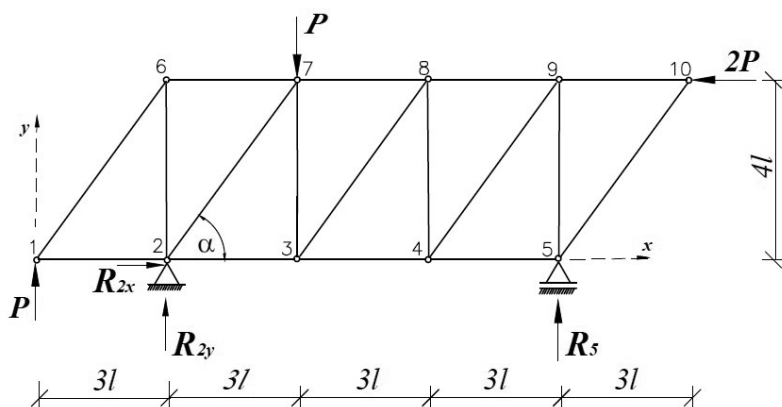
Rekcje podpór (Rys.2.6.7.) obliczamy wykorzystując równania równowagi jak dla płaskiego dowolnego układu sił.

$$\Sigma M_2 = 0 \rightarrow -P \cdot 3l - P \cdot 3l + R_5 \cdot 9l + 2P \cdot 4l = 0 \rightarrow$$

$$R_5 = -\frac{2}{9} P$$

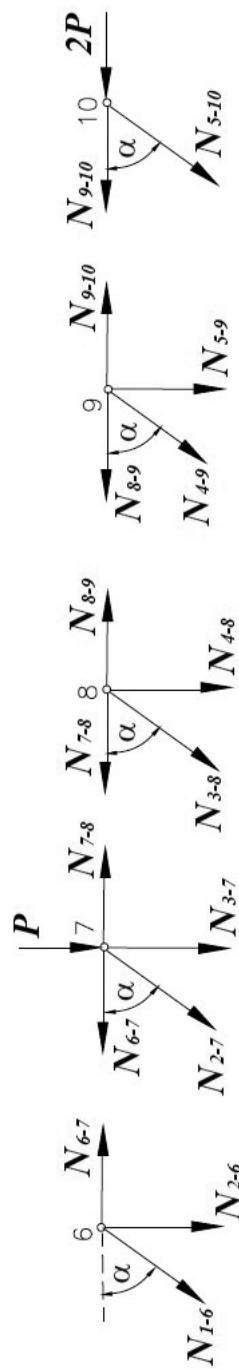
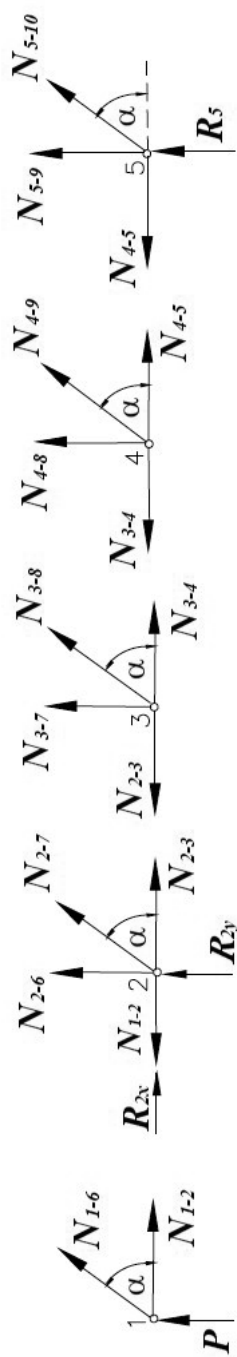
$$\Sigma F_{ix} = 0 \rightarrow R_{2x} - 2P = 0 \rightarrow R_{2x} = 2P$$

$$\Sigma F_{iy} = P + R_{2y} - P + R_5 = 0 \rightarrow R_{2y} = \frac{2}{9} P$$



Rys.2.6.7.

Na Rys.2.6.8. przedstawiono siły czynne i bierne działające w poszczególnych węzłach kratownicy.



Rys.2.6.8.

Wyznaczanie sił w prętach kratownicy rozpoczynamy od węzła 1, w którym mamy tylko dwie nieznane siły N_{1-6} i N_{1-2} .

Węzeł 1 (Rys.2.6.8)

$$\sin\alpha = \frac{4}{5} \quad \cos\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 \quad N_{1-6}\sin\alpha + P = 0 \quad \rightarrow \quad N_{1-6} = -\frac{P}{\sin\alpha} = -\frac{5}{4}P$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 \quad N_{1-6}\cos\alpha + N_{1-2} = 0$$

$$\rightarrow \quad N_{1-2} = -N_{1-6}\cos\alpha = \frac{5}{4}P \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{4}P$$

Węzeł 6 (Rys.2.6.8)

$$\Sigma F_{iy} = 0 \quad -N_{2-6} - N_{1-6}\sin\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad -N_{2-6} + \frac{5}{4}P \frac{4}{5} = 0$$

$$\rightarrow \quad N_{2-6} = P$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 \quad N_{6-7} - N_{1-6}\cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad N_{6-7} + \frac{5}{4}P \frac{3}{5} = 0$$

$$\rightarrow \quad N_{6-7} = -\frac{3}{4}P$$

Węzeł 2 (Rys.2.6.8)

$$\Sigma F_{iy} = 0 \quad R_{2y} + N_{2-6} + N_{2-7}\sin\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad N_{2-7} = -\frac{55}{36}P$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 \quad -N_{1-2} + N_{2-3} + R_{2x} + N_{2-7}\cos\alpha = 0$$

$$\rightarrow \quad N_{2-3} = -\frac{1}{3}P$$

Węzeł 7 (Rys.2.6.8)

$$\Sigma F_{iy} = 0 \quad -P - N_{3-7} - N_{2-7}\sin\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad N_{3-7} = \frac{2}{9}P$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 \quad -N_{6-7} + N_{7-8} - N_{2-7}\cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad N_{7-8} = -\frac{5}{3}P$$

Węzeł 3 (Rys.2.6.8)

$$\Sigma F_{iy} = 0 \quad N_{3-8} \sin \alpha + N_{3-7} = 0 \rightarrow N_{3-8} = -\frac{5}{18}P$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 \quad -N_{2-3} + N_{3-8} \cos \alpha + N_{3-4} = 0 \rightarrow N_{3-4} = -\frac{1}{6}P$$

Węzeł 8 (Rys.2.6.8)

$$\Sigma F_{iy} = 0 \quad -N_{3-8} \sin \alpha - N_{4-8} = 0 \rightarrow N_{4-8} = \frac{2}{9}P$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 \quad -N_{7-8} + N_{8-9} - N_{3-8} \cos \alpha = 0 \rightarrow N_{8-9} = -\frac{11}{6}P$$

Węzeł 4 (Rys.2.6.8)

$$\Sigma F_{iy} = 0 \quad N_{4-9} \sin \alpha + N_{4-8} = 0 \rightarrow N_{4-9} = -\frac{5}{18}P$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 \quad -N_{3-4} + N_{4-9} \cos \alpha + N_{4-5} = 0 \rightarrow N_{4-5} = 0$$

Węzeł 9 (Rys.2.6.8)

$$\Sigma F_{iy} = -N_{4-9} \sin \alpha - N_{5-9} = 0 \rightarrow N_{5-9} = \frac{2}{9}P$$

$$\Sigma F_{ix} = -N_{8-9} - N_{4-9} \cos \alpha + N_{9-10} = 0 \rightarrow N_{9-10} = -2P$$

Sprawdzenie:

Węzeł 10 (Rys.2.6.8)

$$\Sigma F_{ix} = -N_{9-10} - 2P - N_{5-10} \cos \alpha = 2P - 2P = 0$$

$$\Sigma F_{iy} = -N_{5-10} = 0$$

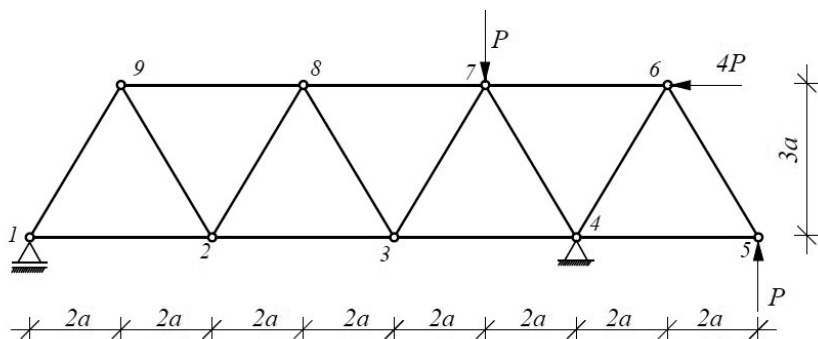
Węzeł 5 (Rys.2.6.8)

$$\Sigma F_{ix} = -N_{4-5} + N_{5-10} \cos \alpha = 0 + 0 \cos \alpha = 0$$

$$\Sigma F_{iy} = R_5 + N_{5-9} + N_{5-10} \sin \alpha = -\frac{2}{9}P + \frac{2}{9}P + 0 \sin \alpha = 0$$

Przykład 2.6.2.

Wyznaczyć siły w prętach 9-8, 2-8, 2-3, 7-6, 7-4 oraz 3-4 kratownicy przedstawionej na Rys.2.6.9.



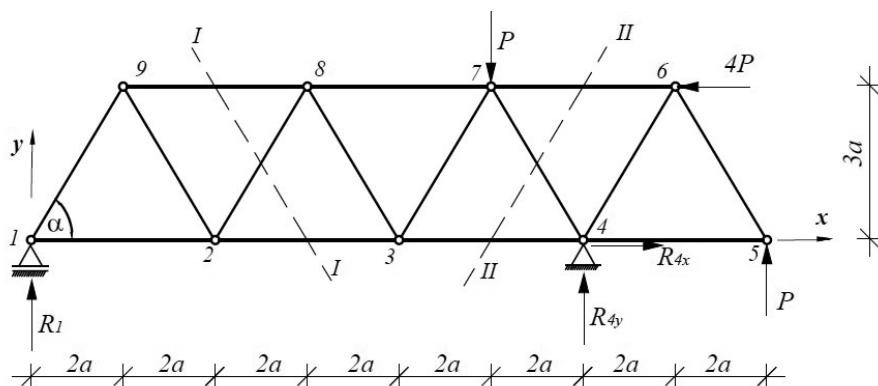
Rys.2.6.9.

Rozwiązanie:

Ponieważ należy wyznaczyć siły tylko w 6 prętach kratownicy to możemy zastosować metodę Rittera.

Stopień statycznej niewyznaczalności rozpatrywanej kratownicy:

$$n = r + p - 2w = 3 + 15 - 2 \cdot 9 = 0$$



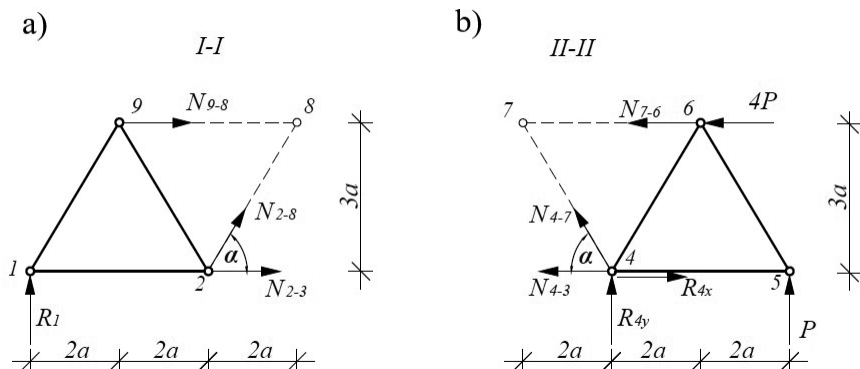
Rys.2.6.10.

Rekcje podpór (Rys.2.6.10.) wyznaczymy z ogólnych równań równowagi jak dla płaskiego układu sił:

$$\begin{aligned}\Sigma M_1 = 0 &\rightarrow R_{4y} \cdot 12a + P \cdot 16a + 4P \cdot 3a - P \cdot 10a = 0 \\ &\rightarrow R_{4y} = -\frac{18}{12}P = -\frac{3}{2}P\end{aligned}$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 \rightarrow R_1 + R_{4y} + P - P = 0 \rightarrow R_1 = \frac{3}{2}P$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 \rightarrow R_{4x} - 4P = 0 \rightarrow R_{4x} = 4P$$



Rys.2.6.11.

W celu wyznaczenia sił w prętach 9-8, 2-8, 2-3, 7-6, 4-7 oraz 4-3 (Rys.2.6.10.) prowadzimy przez te pręty przekroje I-I i II-II a następnie piszemy równania równowagi dla wyciętych części kratownicy (Rys.2.6.11.).

Przekrój I-I

Kierunki poszukiwanych sił 9-8 i 2-8 przecinają się w punkcie 8 zaś sił 2-8 i 2-3 w punkcie 2 (Rys.2.6.11.a.). Stosując równania równowagi będące sumą momentów wszystkich sił, działających na rozpatrywaną część kratownicy, względem odpowiednio punktów 2 i 8 wyznaczmy siły w prętach 9-8 i 2-3. Ponieważ w rozpatrywanym przykładzie dwa z przeciętych prętów są do siebie równoległe, to trzeciego punktu Rittera nie znajdziemy. W takim przypadku siłę w pręcie 2-8 znajdziemy pisząc równanie sumy rzutów sił na oś prostopadłą do kierunku prętów równoległych, czyli na oś y .

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\sum F_{iy} = 0 \rightarrow R_1 + N_{2-8} \cdot \sin \alpha = 0 \rightarrow N_{2-8} = -\frac{3}{2}P \cdot \frac{\sqrt{13}}{3} = -\frac{\sqrt{13}}{2}P$$

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow -N_{9-8} \cdot 3a - R_1 \cdot 4a = 0 \rightarrow N_{9-8} = -2P$$

$$\sum M_8 = 0 \rightarrow -R_1 \cdot 6a + N_{2-3} \cdot 3a = 0 \rightarrow N_{2-3} = 3P$$

Analogicznie postępując znajdziemy siły w prętach 4-3, 7-6 i 4-7 (Rys.2.6.11.b.).

Przekrój II-II

$$\sum M_7 = 0 \rightarrow R_{4y} \cdot 2a + R_{4x} \cdot 3a + P \cdot 6a - N_{4-3} \cdot 3a = 0$$

$$-\frac{3}{2}P \cdot 2a + 4P \cdot 3a + P \cdot 6a = N_{4-3} \cdot 3a \rightarrow N_{4-3} = 5P$$

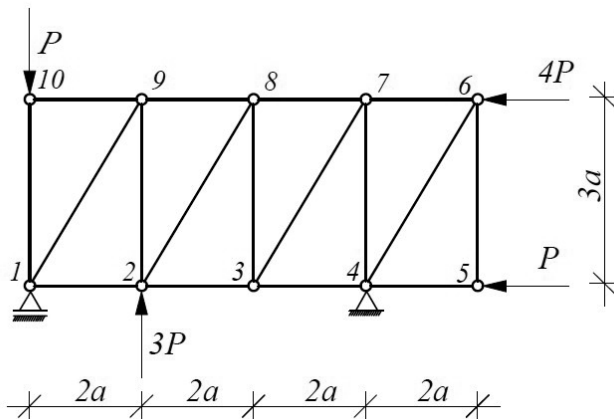
$$\sum M_4 = 0 \rightarrow 4P \cdot 3a + N_{7-6} \cdot 3a + P \cdot 4a = 0 \rightarrow N_{7-6} = -\frac{16}{3}P$$

$$\sum F_{iy} = 0 \rightarrow R_{4y} + P + N_{4-7} \cdot \sin \alpha = 0 \rightarrow -\frac{3}{2}P + P + N_{4-7} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 0$$

$$N_{4-7} = \frac{\sqrt{13}}{6}P$$

Przykład 2.6.3.

Wyznaczyć siły w prętach 2-3, 9-8, 8-2, 7-8, 7-3, 3-4 kratownicy przedstawionej na Rys.2.6.12.



Rys.2.6.12.

Rozwiązanie:

Stopień statycznej niewyznaczalności rozpatrywanej kratownicy:

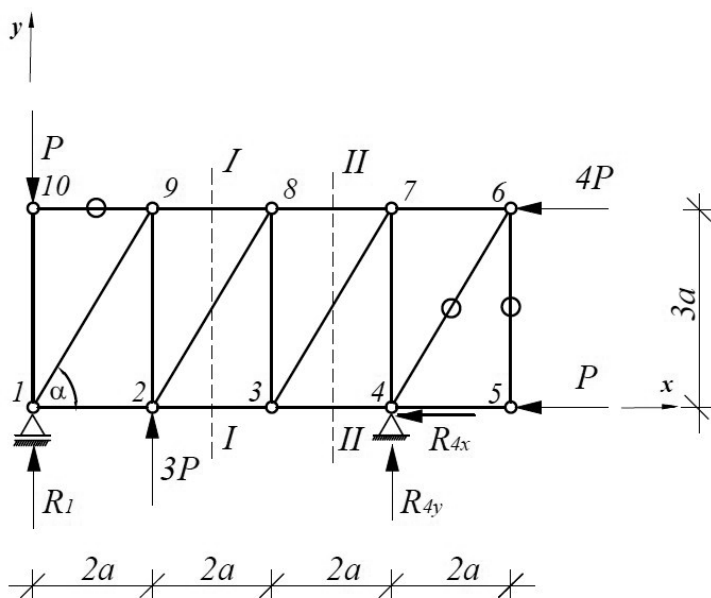
$$n = r + p - 2w = 3 + 17 - 2 \cdot 10 = 0$$

Rekcje podpór (Rys.2.6.13.) wyznaczymy z ogólnych równań równowagi jak dla płaskiego układu sił.

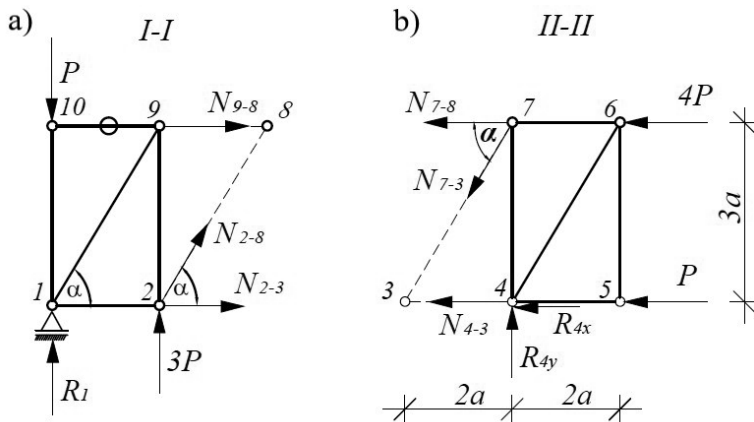
$$\sum M_1 = 0 \rightarrow 3P \cdot 2a + R_{4y} \cdot 6a + 4P \cdot 3a = 0 \rightarrow R_{4y} = -3P$$

$$\sum F_{iy} = 0 \rightarrow R_1 + 3P + R_{4y} - P = 0 \rightarrow R_1 = P$$

$$\sum F_{ix} = 0 \rightarrow -R_{4x} - 4P - P = 0 \rightarrow R_{4x} = -5P$$



Rys.2.6.13



Rys.2.6.14.

W celu wyznaczenia sił prętach 2-3, 9-8, 2-8 prowadzimy przez te pręty przekrój I-I a następnie piszemy równania równowagi odciętej lewej części kratownicy (Rys.2.6.14.a.).

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow -N_{9-8} \cdot 3a + P \cdot 2a - R_1 \cdot 2a = 0 \rightarrow N_{9-8} = 0$$

$$\sum M_8 = 0 \rightarrow N_{2-3} \cdot 3a - R_1 \cdot 4a - 3P \cdot 2a + P \cdot 4a = 0 \rightarrow N_{2-3} = 2P$$

$$\sum F_{iy} = 0 \rightarrow R_1 + N_{2-8} \cdot \sin \alpha + 3P - P = 0 \rightarrow N_{2-8} = -\sqrt{13}P$$

Siły w prętach 7-8, 7-3, 3-4 wyznaczmy analogicznie pisząc równania równowagi dla prawej części przekroju II-II (Rys.2.6.14.b.).

$$\sum M_3 = 0 \rightarrow N_{7-8} \cdot 3a + 4P \cdot 3a + R_{4y} \cdot 2a = 0 \rightarrow N_{7-8} = -2P$$

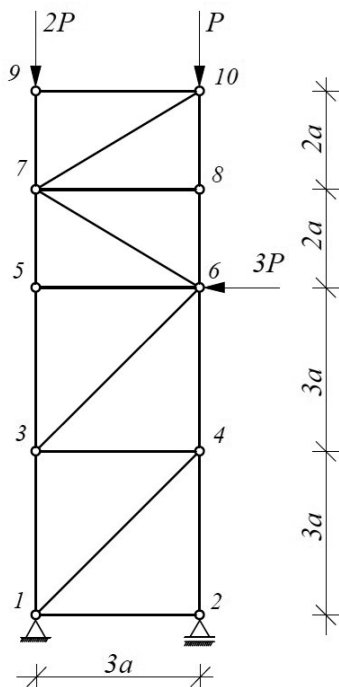
$$\sum M_7 = 0 \rightarrow -N_{4-3} \cdot 3a - R_{4x} \cdot 3a - P \cdot 3a = 0 \rightarrow N_{4-3} = 4P$$

$$\sum F_{iy} = 0 \rightarrow R_{4y} - N_{7-3} \cdot \sin \alpha = 0 \rightarrow N_{7-3} = -\sqrt{13}P$$

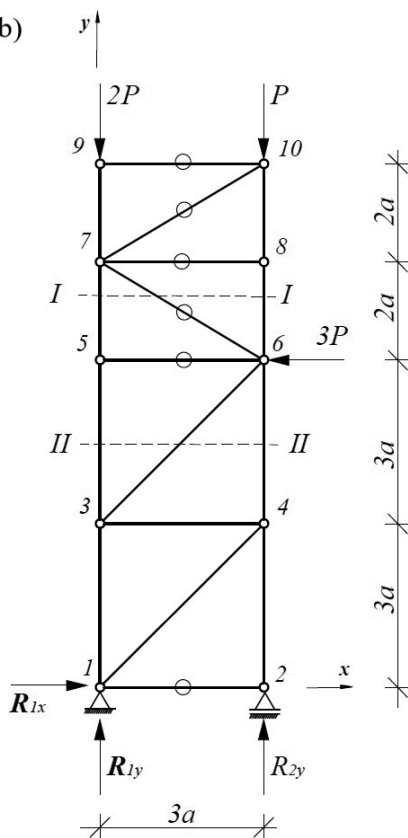
Przykład 2.6.4.

Wyznaczyć siły w prętach 3-5, 3-6, 4-6, 7-5, 7-6, 6-8 kratownicy przedstawionej na Rys.2.6.15.a.

a)



b)



Rys.2.6.15.

Rozwiązanie:

Stopień statycznej niewyznaczalności rozpatrywanej kratownicy:

$$n = r + p - 2w = 3 + 17 - 2 \cdot 10 = 0$$

Rekcje podpór (Rys.2.6.14.b.) wyznaczymy z równań równowagi jak dla płaskiego układu sił.

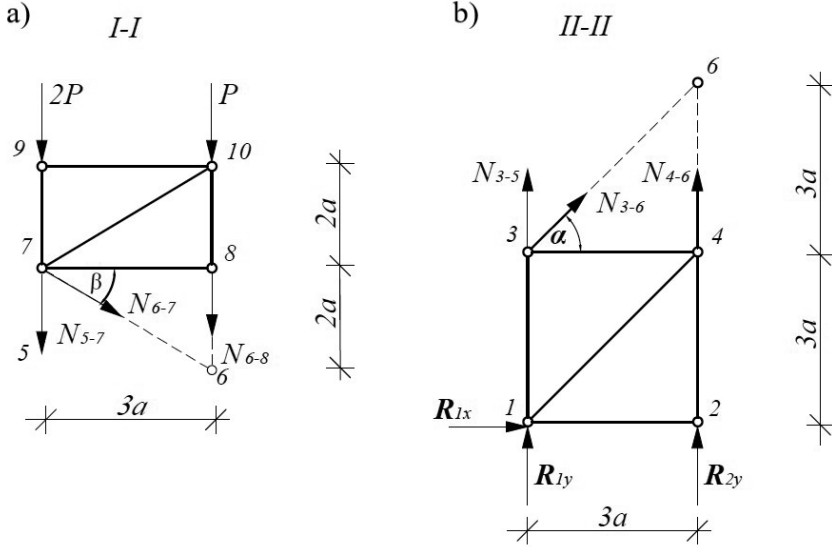
$$\sum M_1 = 0 \rightarrow 3P \cdot 6a + R_{2y} \cdot 3a - P \cdot 3a = 0 \rightarrow R_{2y} = -5P$$

$$\sum F_{iy} = 0 \rightarrow R_{1y} - 2P + R_{2y} - P = 0 \rightarrow R_{1y} = 8P$$

$$\sum F_{ix} = 0 \rightarrow R_{1x} - 3P = 0 \rightarrow R_{1x} = 3P$$

W celu wyznaczenia sił w prętach 7-5, 7-6, 6-8, prowadzimy przez te pręty przekrój I-I (Rys.2.6.15.b.). Siły w przeciętych prętach znajdziemy wykorzystując warunki równowagi odciętej górnej części kratownicy

(Rys.2.6.16.a.). Aby znaleźć poszukiwane siły nie musimy znać wartości reakcji podporowych jeżeli równania równowagi postawimy dla górnej odciętej części.



Rys.2.6.16.

$$\cos\beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\sum F_{ix} = 0 \rightarrow N_{6-7} \cdot \cos\beta = 0 \rightarrow N_{6-7} = 0$$

$$\sum M_7 = 0 \rightarrow -N_{6-8} \cdot 3a - P \cdot 3a = 0 \rightarrow N_{6-8} = -P$$

$$\sum M_6 = 0 \rightarrow 2P \cdot 3a + N_{5-7} \cdot 3a = 0 \rightarrow N_{5-7} = -2P$$

Siły w prętach 3-5, 3-6, 4-6 wyznaczmy pisząc równania równowagi dla dolnej części przekroju II-II (Rys.2.6.16.b.).

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

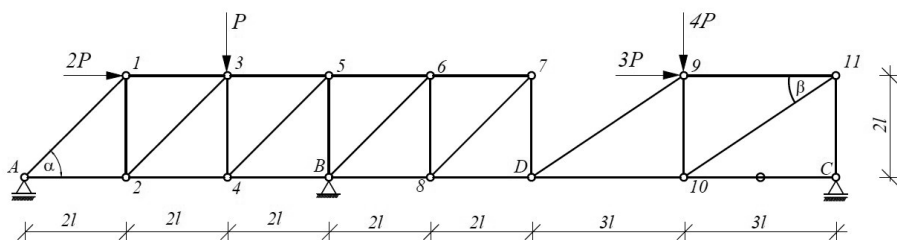
$$\sum F_{ix} = 0 \rightarrow R_{1x} + N_{6-3} \cdot \cos\alpha = 0 \rightarrow N_{6-3} = \frac{-3P}{\cos\alpha} = -3\sqrt{2}P$$

$$\sum M_6 = 0 \rightarrow -N_{3-5} \cdot 3a - R_{1y} \cdot 3a + R_{1x} \cdot 6a = 0 \rightarrow N_{3-5} = -2P$$

$$\sum M_3 = 0 \rightarrow N_{4-6} \cdot 3a + R_{2y} \cdot 3a + R_{1x} \cdot 3a = 0 \rightarrow N_{4-6} = 2P$$

Przykład 2.6.5.

Wyznaczyć siły w prętach 3-5, 3-4, 2-4, 5-6, 6-B, B-8, 6-7, 6-8, 9-11, 10-11, 10-C kratownicy pokazanej na Rys.2.6.17.



Rys.2.6.17.

Rozwiązanie:

Stopień statycznej niewyznaczalności rozpatrywanej kratownicy:

$$n = r + p - 2w = 4 + 26 - 2 \cdot 15 = 0$$

W celu wyznaczenia reakcji i uproszczenia dalszych obliczeń kratownicę przedstawioną na Rys.2.6.17. podzielono w przegubie D na dwie kratownice proste (Rys. 2.6.18.a. i 2.6.18.b.).

- kratownica prawa (Rys. 2.6.18.a.):

$$\sum F_{ix}^P = 0 \rightarrow R_{Dx} + 3P = 0 \rightarrow R_{Dx} = -3P$$

$$\sum M_D^P = 0 \rightarrow R_C \cdot 6l - 4P \cdot 3l - 3P \cdot 2l = 0 \rightarrow R_C = 3P$$

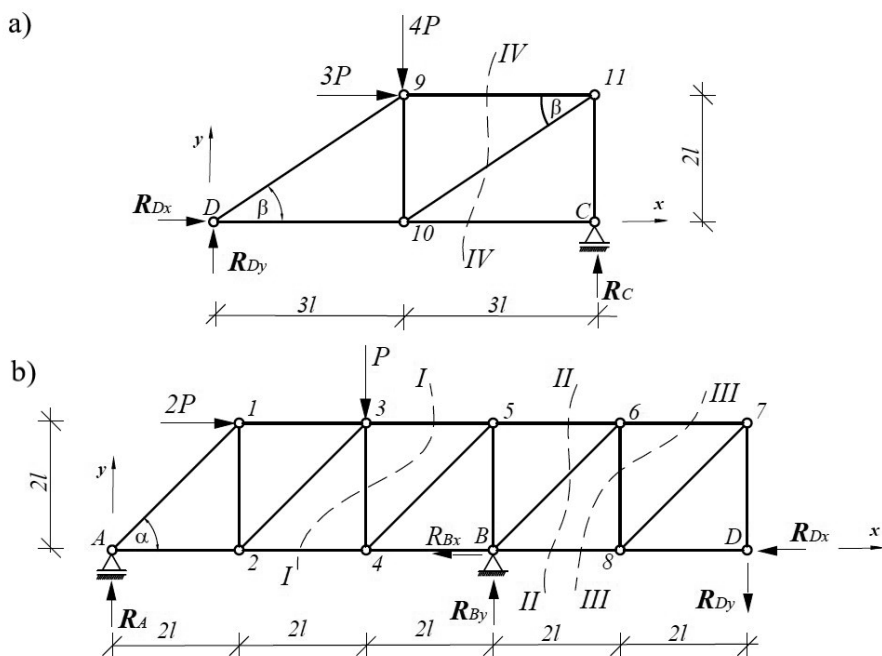
$$\sum F_{iy}^P = 0 \rightarrow R_{Dy} + R_C - 4P = 0 \rightarrow R_{Dy} = P$$

- kratownica lewa (Rys. 2.6.18.b.):

$$\sum M_A^L = 0 \rightarrow R_{By} \cdot 6l - P \cdot 4l - 2P \cdot 2l - R_{Dy} \cdot 10l = 0 \rightarrow R_{By} = 3P$$

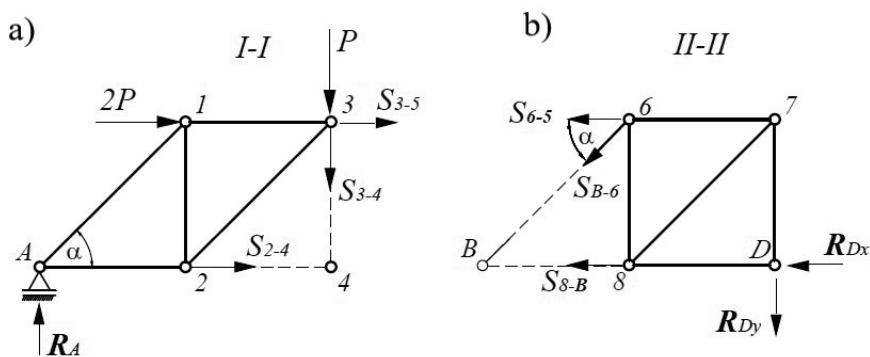
$$\sum F_{iy}^L = 0 \rightarrow R_A + R_{By} - P - R_{Dy} = 0 \rightarrow R_A = -P$$

$$\sum F_{ix}^L = 0 \rightarrow -R_{Bx} + 2P - R_{Dx} = 0 \rightarrow R_{Bx} = 5P$$



Rys.2.6.18.

Siły w prętach 3-5, 3-4, 2-4 wyznaczmy pisząc równania równowagi dla lewej części przekroju I-I (Rys.2.6.19.a.).



Rys.2.6.19.

$$\sum M_4 = 0 \rightarrow -R_A \cdot 4l - 2P \cdot 2l - S_{3-5} \cdot 2l = 0 \rightarrow S_{3-5} = 0$$

$$\sum M_3 = 0 \rightarrow -R_A \cdot 4l + S_{2-4} \cdot 2l = 0 \rightarrow S_{2-4} = -2P$$

$$\sum F_{iy} = 0 \rightarrow R_A - P - S_{3-4} = 0 \rightarrow S_{3-4} = -2P$$

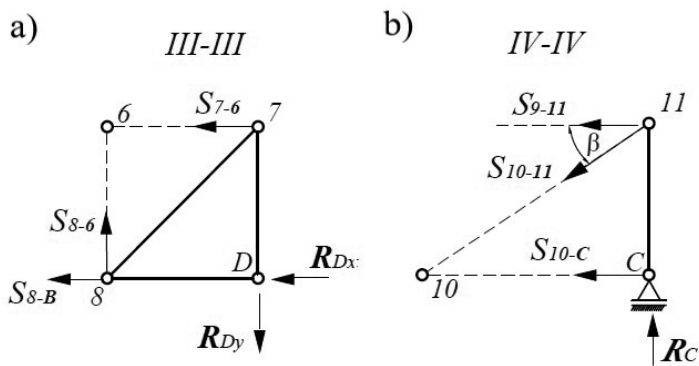
Przekrój II-II (Rys. 2.6.19.b.)

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sum F_{iy} = 0 \rightarrow -S_{B-6}\sin\alpha - R_{Dy} = 0 \rightarrow S_{B-6} = -\sqrt{2}P$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow -R_{Dy} \cdot 4l + S_{6-5} \cdot 2l = 0 \rightarrow S_{6-5} = 2P$$

$$\sum M_6 = 0 \rightarrow -R_{Dy} \cdot 2l - R_{Dx} \cdot 2l - S_{8-B} \cdot 2l = 0 \rightarrow S_{8-B} = 2P$$



Rys.2.6.20.

Przekrój III – III (Rys. 2.6.20.a.)

$$\sum F_{iy} = 0 \rightarrow S_{8-6} - R_{Dy} = 0 \rightarrow S_{8-6} = P$$

$$\sum M_8 = 0 \rightarrow -R_{Dy} \cdot 2l + S_{7-6} \cdot 2l = 0 \rightarrow S_{7-6} = P$$

$$\sum M_6 = 0 \rightarrow -R_{Dy} \cdot 2l - R_{Dx} \cdot 2l - S_{8-B} \cdot 2l = 0 \rightarrow S_{8-B} = 2P$$

Przekrój IV – IV (Rys. 2.6.20.b.)

$$\sin\beta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

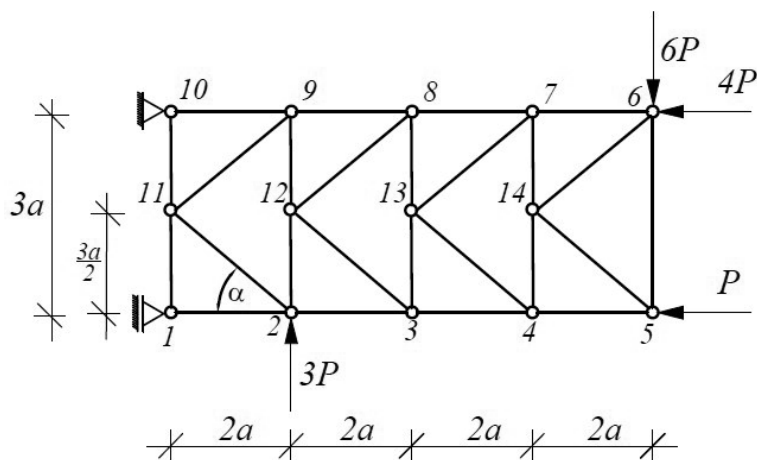
$$\sum F_{iy} = 0 \rightarrow -S_{10-11}\sin\beta + R_C = 0 \rightarrow S_{10-11} = \frac{3\sqrt{13}}{2}P$$

$$\sum M_{10} = 0 \rightarrow R_C \cdot 3l + S_{9-11} \cdot 2l = 0 \rightarrow S_{9-11} = -\frac{9}{2}P$$

$$\sum M_{11} = 0 \rightarrow S_{10-C} = 0$$

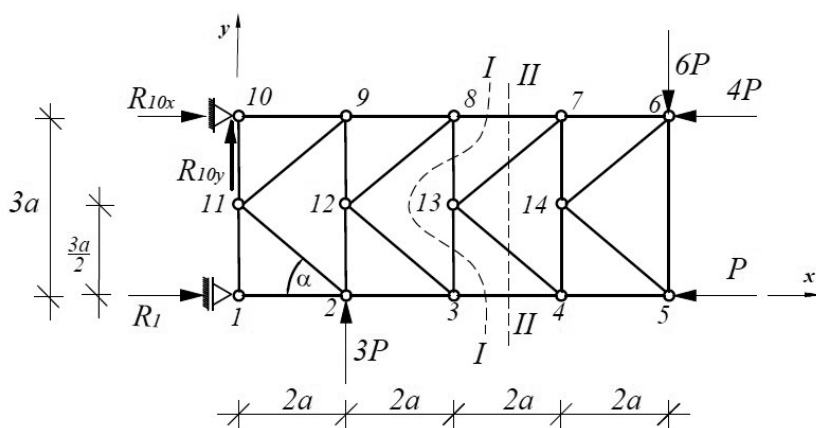
Przykład 2.6.6.

Wyznaczyć siły w prętach 8-7, 3-4, 13-7, 13-4 kratownicy typu K przedstawionej na Rys.2.6.21.



Rys.2.6.21.

Rozwiązanie:

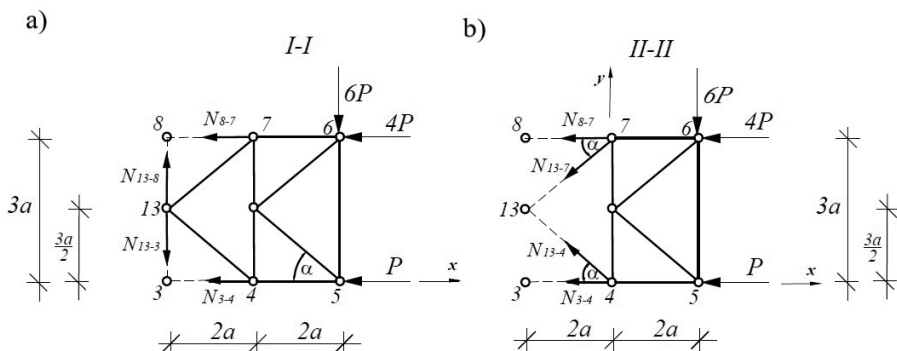


Rys.2.6.22.

Stopień statycznej niewyznaczalności rozpatrywanej kratownicy:

$$n = r + p - 2w = 3 + 25 - 2 \cdot 14 = 0$$

Siły w prętach 8-7, 3-4, 13-7, 13-4 możemy wyznaczyć analizując równowagę sił dla prawych części przekrojów (Rys. 2.6.23.). Nie ma, w związku z tym, potrzeby wyznaczania reakcji podpór.



Rys.2.6.23.

W celu wyznaczenia sił w prętach 8-7 i 3-4 prowadzimy przez te pręty przekrój I-I. Siły w przeciętych prętach znajdziemy wykorzystując warunki równowagi odciętej prawej części kratownicy (Rys.2.6.23.a.)

$$\sum M_3 = 0 \rightarrow N_{8-7} \cdot 3a + 4P \cdot 3a - 6P \cdot 4a = 0 \rightarrow N_{8-7} = 4P$$

$$\sum M_8 = 0 \rightarrow -N_{3-4} \cdot 3a - P \cdot 3a - 6P \cdot 4a = 0 \rightarrow N_{3-4} = -9P$$

Siły w prętach 13-7 i 13-4 wyznaczmy pisząc równania równowagi dla prawej części przekroju II-II (Rys.2.6.23.b.).

$$\sum F_{iy} = 0 \rightarrow -6P - N_{13-7} \cdot \sin \alpha + N_{13-4} \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0 \rightarrow & -4P - P - N_{13-7} \cdot \cos \alpha - N_{13-4} \cdot \cos \alpha - N_{8-7} - N_{3-4} = \\ & = -N_{13-7} \cdot \cos \alpha - N_{13-4} \cdot \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

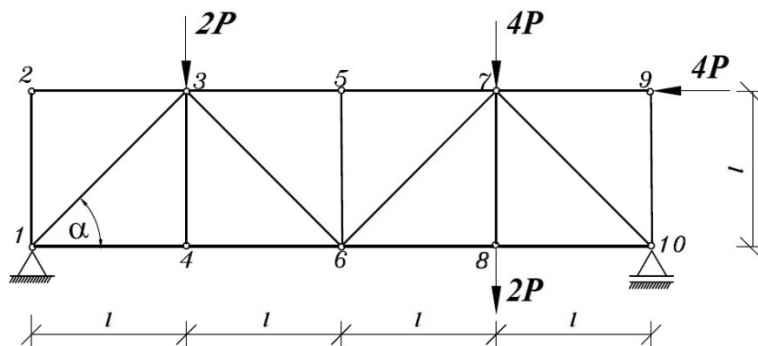
$$N_{13-7} = -5P$$

$$N_{13-4} = 5P$$

2.6.2. Kratownice – zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.

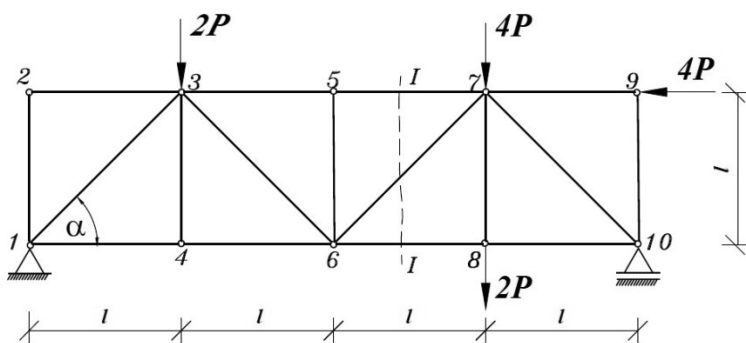
Wyznaczyć siły w prętach kratownicy przedstawionej na Rys.2.6.24. metodą równoważenia węzłów. Zaznaczyć wszystkie pręty zerowe.



Rys.2.6.24.

Zadanie 2.

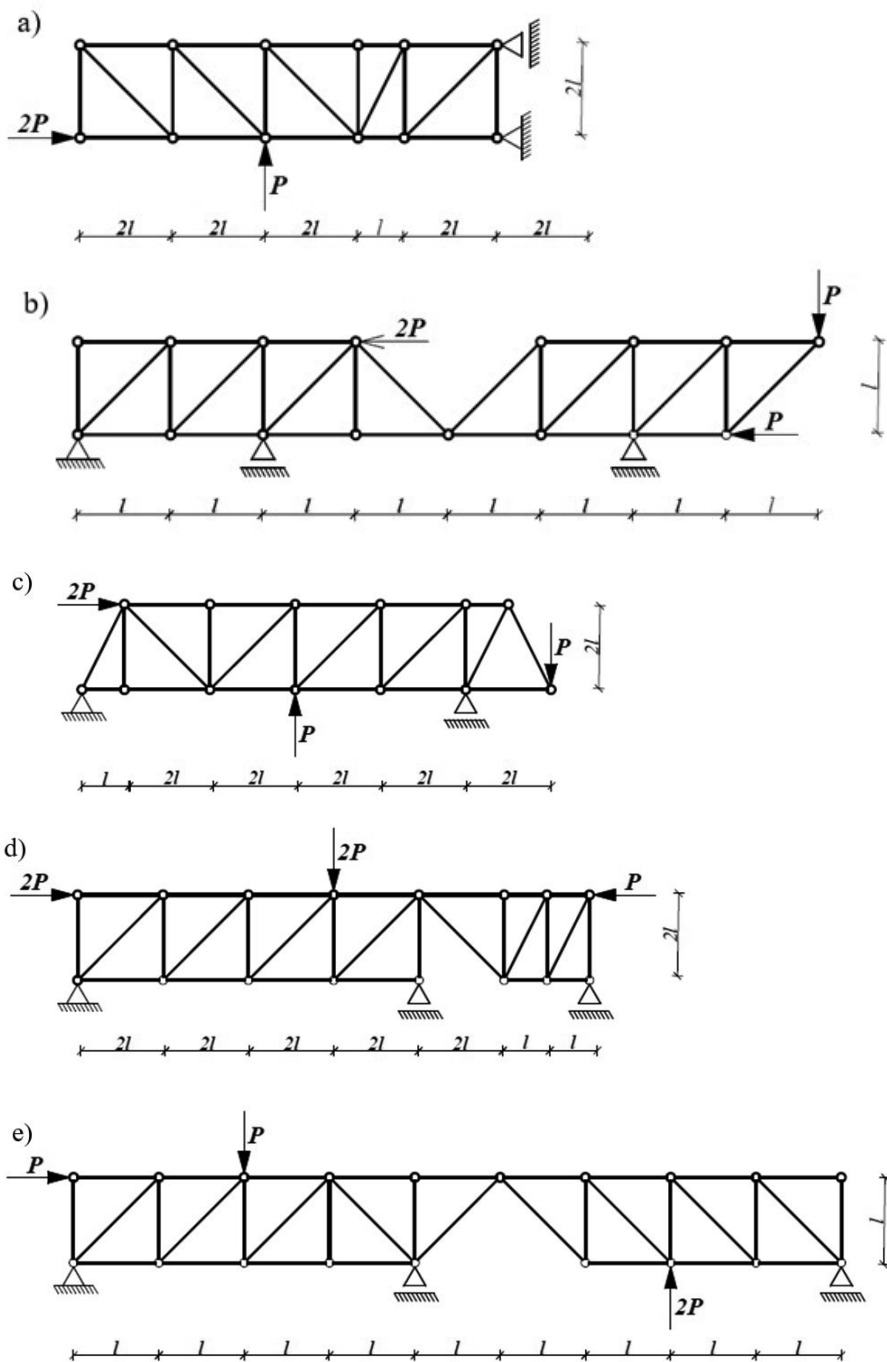
Wyznaczyć siły w prętach 5-7, 6-7, 6-8 kratownicy przedstawionej na Rys.2.6.25. stosując metodę Rittera.



Rys.2.6.25.

Zadanie 3.

Wyznaczyć siły w prętach kratownic przedstawionych na Rys.2.6.26.

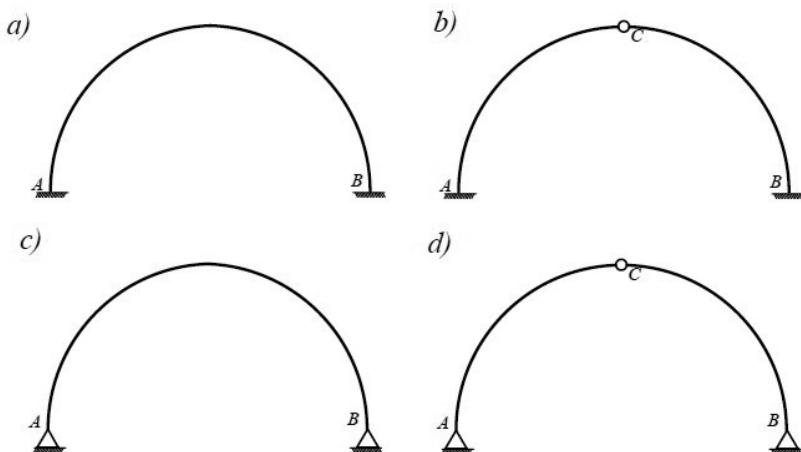


Rys.2.6.26.

2.7. Łuki [2]

Łuki stosowane są jako dźwigary nośne w budownictwie ogólnym i mostowym. Ze względu na wyniosłość łuki dzielimy na: płaskie ($f \leq \frac{l}{5}$) i wyniosłe ($f \geq \frac{l}{5}$), gdzie f – strzałka łuku (wysokość), l – rozpiętość łuku.

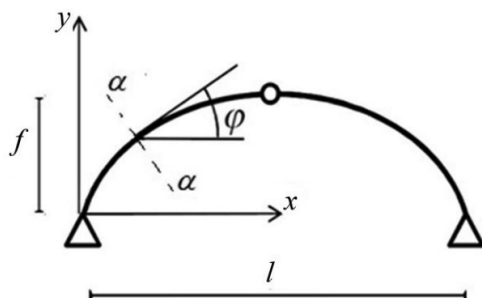
Z uwagi na schemat statyczny najczęściej w konstrukcjach budowlanych stosowane są łuki: bezprzegubowe (Rys.2.7.1.a), jednoprzegubowe (Rys. 2.7.1.b), dwuprzegubowe (Rys. 2.7.1.c) i trójpzregubowe (Rys. 2.7.1.d).



Rys. 2.7.1.

Kształt łuku może być kołowy, paraboliczny, eliptyczny, sinusoidalny i inny [2]:

- łuk paraboliczny (Rys.2.7.2.) – stosowany jest głównie przy dominującym obciążeniu równomiernie rozłożonym.



Rys. 2.7.2.

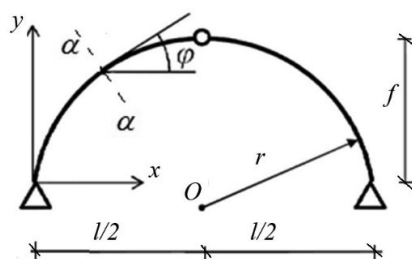
W układzie współrzędnych przedstawionym na Rys.2.7.2. równanie osi łuku ma postać:

$$y = \frac{4f}{l^2} \cdot x \cdot (l - x), \quad (2.8)$$

zaś kąt nachylenia stycznej do krzywej w dowolnym przekroju α - α :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{4f}{l^2} \cdot (l - 2x) \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \left[\frac{4f}{l^2} \cdot (l - 2x) \right] \quad (2.9)$$

- łuk kołowy (Rys.2.7.3.) – stosowany jest głównie przy dominującym obciążeniu radialnym.



Rys.2.7.3.

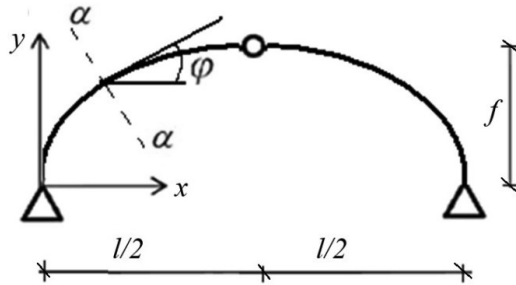
W układzie współrzędnych przedstawionym na Rys.2.7.3. równanie osi łuku ma postać:

$$y = f - r + \sqrt{r^2 - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2} \quad (2.10)$$

zaś kąt nachylenia stycznej do krzywej w dowolnym przekroju α - α :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{l-2x}{2\sqrt{r^2 - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2}} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \left[\frac{l-2x}{2\sqrt{r^2 - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2}} \right] \quad (2.11)$$

- łuk eliptyczny (Rys.2.7.4.) – stosowany głównie przy dominującym obciążeniu trapezowym, symetrycznym względem zwornika.



Rys.2.7.4.

W układzie współrzędnych przedstawionym na Rys.2.7.4. równanie osi łuku ma postać:

$$y = \sqrt{f^2 - \frac{4f^2 \cdot \left(x - \frac{l}{2}\right)^2}{l^2}} \quad (2.12)$$

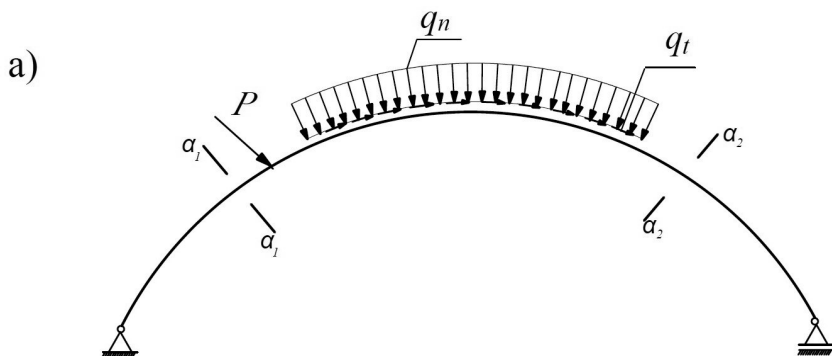
zaś kąt nachylenia stycznej do krzywej w dowolnym przekroju α - α :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{-f \cdot (2x-l)}{l \cdot \sqrt{-x \cdot (x-l)}} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \left[\frac{-f \cdot (2x-l)}{l \cdot \sqrt{-x \cdot (x-l)}} \right] \quad (2.13)$$

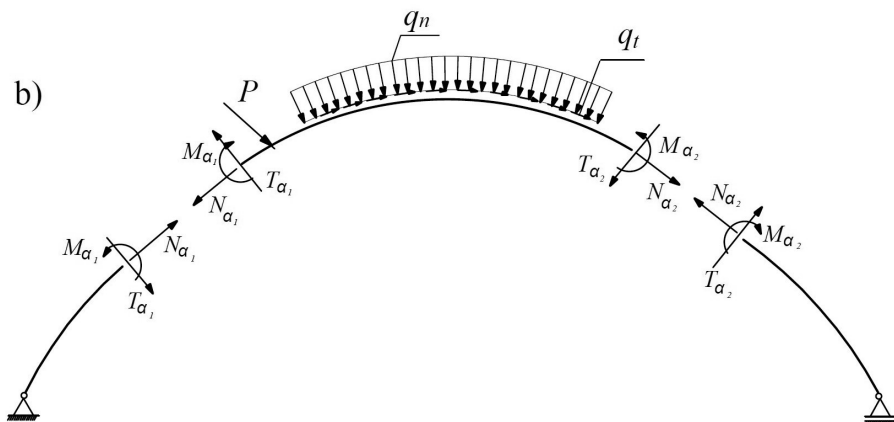
Reakcje podpór w łukach statycznie wyznaczalnych wyznaczamy korzystając z równań równowagi takich jak dla płaskiego dowolnego układu sił.

2.7.1. Siły wewnętrzne w łukach [2],[3]

Rozważmy łuk przedstawiony na Rys.2.7.5.a będący w równowadze pod wpływem działających nań obciążeń. Jeżeli przetniemy łuk myślowo przekrojem $\alpha_1 - \alpha_1$ lub $\alpha_2 - \alpha_2$, to w płaszczyźnie przekroju wystąpią siły wzajemnego oddziaływania oddzielonych części (Rys.2.7.5.b.).



Rys.2.7.5.a.

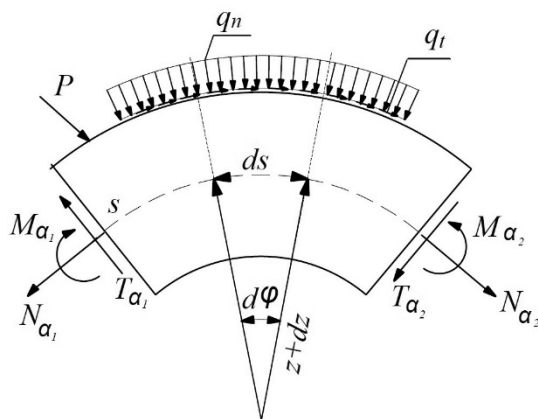


Rys.2.7.5.b.

Na Rys.2.7.6. przedstawiono siły działające na wycięty przekrojami $\alpha_1 - \alpha_1$ i $\alpha_2 - \alpha_2$ środkowy fragment łuku (oddziaływanie pozostałych części łuku na rozpatrywany element przedstawiono w postaci sił wewnętrznych N_{α_1} , T_{α_1} i M_{α_1} oraz N_{α_2} , T_{α_2} i M_{α_2}).

Pokazane na Rys 2.7.6. zwroty sił wewnętrznych traktujemy, zgodnie z przyjętą umową znakowania, jako dodatnie.

Istota sił wewnętrznych została szerzej omówiona w rozdziałach 2.1. i 2.2.



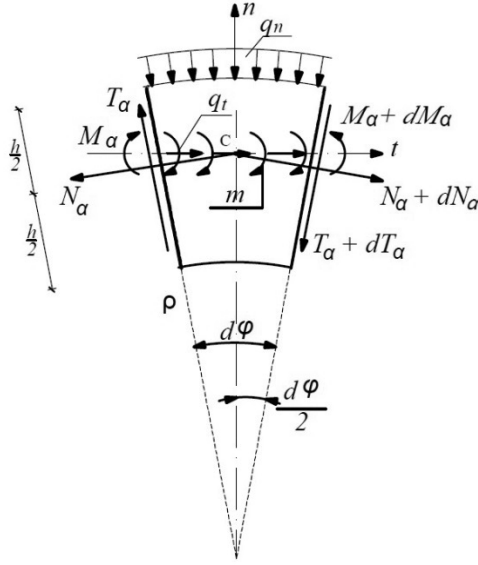
Rys.2.7.6.

2.7.2. Zależności różniczkowe między siłami wewnętrznymi i obciążeniem zewnętrznym [3]

W celu wyznaczenia zależności różniczkowych występujących między siłami wewnętrznymi i obciążeniem zewnętrznym rozważymy łuk swobodnie podparty przedstawiony na Rys 2.7.5.a., z którego wycinamy nieskończenie mały element o długości ds (Rys.2.7.6.). Oddziaływanie sąsiednich elementów na wycięty element ds przedstawiono w postaci sił wewnętrznych (Rys.2.7.7.).

Ponieważ wszystkie obciążenia zostały zredukowane do osi ciężkości łuku, to obciążenie poziome q_t rozłożone w sposób ciągły na górnej krawędzi łuku, dało w osi dodatkowy moment ciągły $m = q_t \frac{h}{2}$.

Można przyjąć, że na długości analizowanego elementu o długości ds obciążenia zewnętrzne mają wartość stałą.



Rys.2.7.7.

Analizowany łuk jest w równowadze, więc i wycięty jego element o długości ds musi być w równowadze.

Dla elementu tego możemy zatem utworzyć trzy równania równowagi rzutując wszystkie siły na kierunek normalny i styczny do osi środkowej łuku oraz pisząc równanie momentów względem punktu C.

Jeżeli $d\varphi \cong 0$ to $\sin d\varphi \cong d\varphi$;

$$\cos d\varphi \cong 1 \left(\sin \frac{d\varphi}{2} \cong \frac{d\varphi}{2}; \cos \frac{d\varphi}{2} \cong 1 \right)$$

Przyjmując, że $ds = \rho d\varphi$ oraz pomijając małe wielkości wyższego rzędu równania równowagi mają postać:

$$\sum F_{in} = 0; \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} -(T_\alpha + dT_\alpha) \cos \frac{d\varphi}{2} + T_\alpha \cos \frac{d\varphi}{2} - N_\alpha \sin \frac{d\varphi}{2} - \\ (N_\alpha + dN_\alpha) \sin \frac{d\varphi}{2} - q_n ds = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$-dT_\alpha - 2N_\alpha \frac{ds}{2\rho} - q_n ds = 0 \quad (2.16)$$

$$\sum F_{it} = 0; \quad (2.17)$$

$$(N_\alpha + dN_\alpha) \cos \frac{d\varphi}{2} - N_\alpha \cos \frac{d\varphi}{2} - T_\alpha \sin \frac{d\varphi}{2} - (T_\alpha + dT_\alpha) \sin \frac{d\varphi}{2} + q_t ds = 0 \quad (2.18)$$

$$dN_\alpha - 2T_\alpha \frac{ds}{2\varrho} + q_t ds = 0 \quad (2.19)$$

$$\Sigma M_{(c)} = 0; \quad (2.20)$$

$$-M_\alpha + (M_\alpha + dM_\alpha) - T_\alpha \varrho \tan \frac{d\varphi}{2} - (T_\alpha + dT_\alpha) \varrho \tan \frac{d\varphi}{2} - mds = 0 \quad (2.21)$$

$$M_\alpha - (M_\alpha + dM_\alpha) + 2T_\alpha \varrho \tan \frac{d\varphi}{2} + mds = 0 \quad (2.22)$$

$$-dM_\alpha + T_\alpha ds + mds = 0 \quad (2.23)$$

Różniczkowe zależności między siłami wewnętrznymi i obciążeniem zewnętrznym mają więc postać:

$$\frac{dT_\alpha}{ds} = -q_n - \frac{N_\alpha}{\varrho} \quad (2.24)$$

$$\frac{dN_\alpha}{ds} = -q_t + \frac{T_\alpha}{\varrho} \quad (2.25)$$

$$\frac{dM_\alpha}{ds} = T_\alpha + m \quad (2.26)$$

2.7.3. Przykłady obliczeniowe – łuki

Przykład 2.7.1.

Dla łuku kołowego przedstawionego na Rys.2.7.8.a. sporządzić wykresy sił wewnętrznych.

1. Stopień statycznej niewyznaczalności $n=0$

2. Obliczenie reakcji (Rys.2.7.8.b.):

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -P + R_{Ay} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ay} = P$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} = 0$$

$$\sum M_A = 0; \quad M_A - P \cdot 2r = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = 2Pr$$

3. Równania sił wewnętrznych w przedziale B-A (Rys.2.7.9.)

Siłę P przyłożoną w punkcie B zrzutowano na kierunek normalny i styczny do przekroju α - α .

φ – kąt nachylenia stycznej do krzywej w punkcie, w którym wyznaczamy siły wewnętrzne $T_\alpha, N_\alpha, M_\alpha$

Przedział B-A $0 \leq x < 2r \quad 0 \leq y < r$

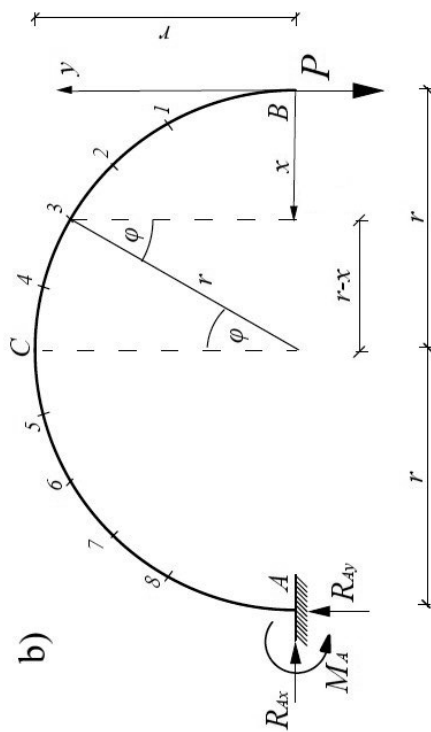
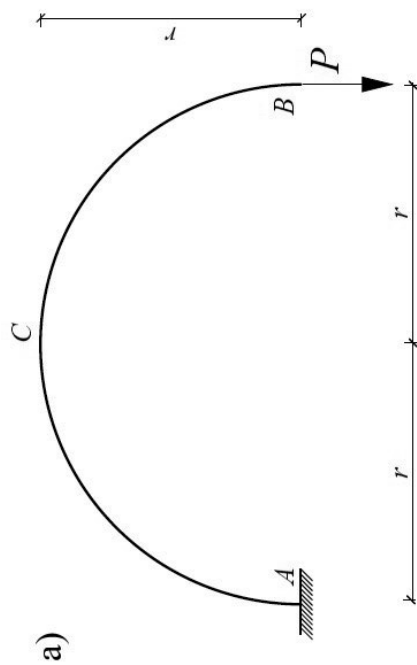
$$\sum F_{it} = 0; \quad N_\alpha = P \sin \varphi$$

$$\sum F_{in} = 0; \quad T_\alpha = P \cos \varphi$$

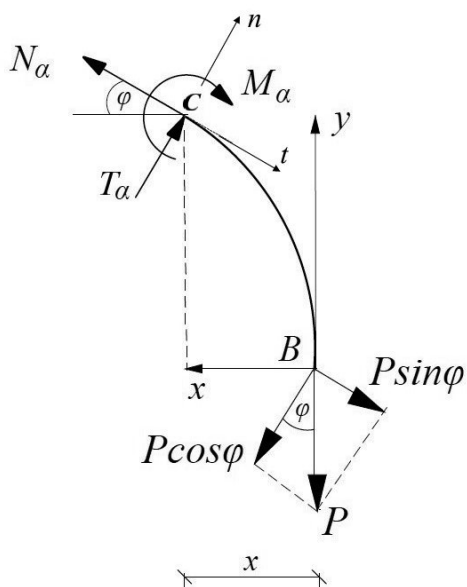
$$\sum M_{ic} = 0; \quad M_\alpha = -Px$$

$$\sin \varphi = \frac{r - x}{r}$$

$$\varphi = \arcsin \frac{r - x}{r}$$



Rys.2.7.8.

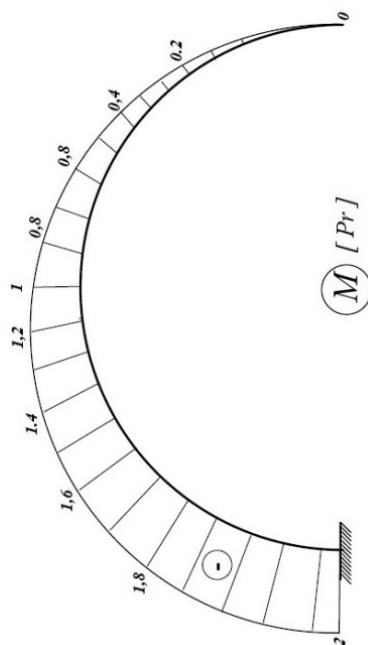
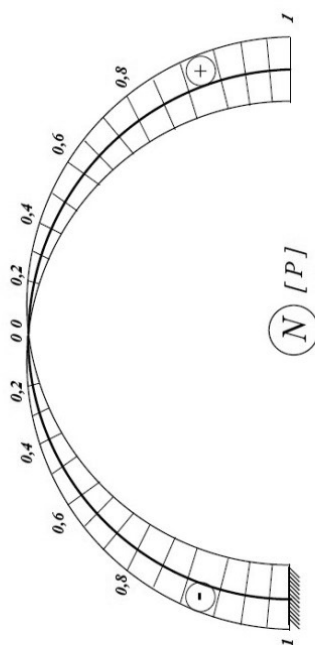
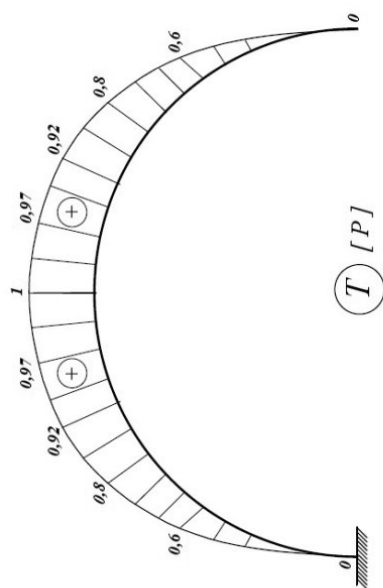


Rys.2.7.9.

Tabela 2.7.1. Wartości sił wewnętrznych w punktach charakterystycznych

Punkt	x [r]	φ [rad]	T_{α} [P]	N_{α} [P]	M_{α} [Pr]
B	0,00	$\frac{\pi}{2}$	0	1	0
1	0,20	0,927295	0,6	0,8	-0,2
2	0,40	0,6435011	0,8	0,6	-0,4
3	0,60	0,4115168	0,916515139	0,4	-0,6
4	0,80	0,2013579	0,979795897	0,2	-0,8
C	1,00	0	1	0	-1
5	1,20	-0,2013579	0,979795897	-0,2	-1,2
6	1,40	-0,4115168	0,916515139	-0,4	-1,4
7	1,60	-0,6435011	0,8	-0,6	-1,6
8	1,80	-0,927295	0,6	-0,8	-1,8
A	2,00	$-\frac{\pi}{2}$	0	-1	-2

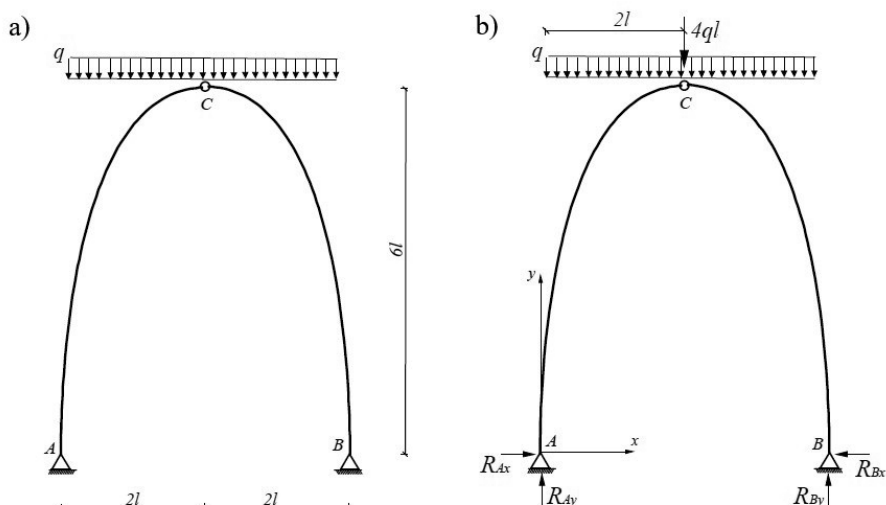
Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys. 2.7.10.



Rys.2.7.10.

Przykład 2.7.2.

Dla łuku parabolicznego przedstawionego na Rys.2.7.11.a. sporządzić wykresy sił wewnętrznych.



Rys.2.7.11.

1. Stopień statycznej niewyznaczalności $n=4+2-3 \cdot 2=0$

2. Obliczenie reakcji (Rys.2.7.11.b.):

$$\sum M_A = 0; \quad R_{By} \cdot 4l - 4ql \cdot 2l = 0 \quad \rightarrow \quad R_{By} = 2ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -4ql + R_{Ay} + R_{By} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ay} = 2ql$$

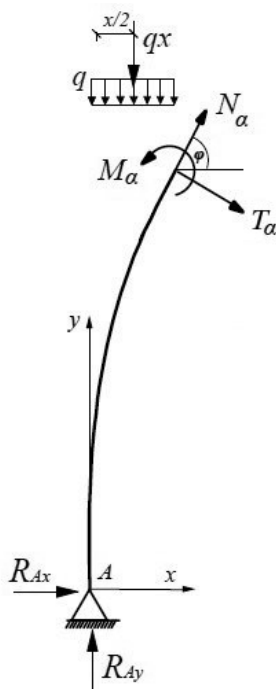
$$\sum M_C^P = 0; \quad R_{By} \cdot 2l - 2ql \cdot l - R_{Bx} \cdot 6l = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Bx} = \frac{1}{3}ql$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} - R_{Bx} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ax} = \frac{1}{3}ql$$

3. Równania sił wewnętrznych (Rys.2.7.12.)

Wartość siły poprzecznej T_α w danym przekroju α jest równa sumie algebraicznej wszystkich sił zewnętrznych leżących po jednej stronie analizowanego przekroju zrzuconych na kierunek tego przekroju. W związku z tym wszystkie siły leżące po lewej stronie przekroju $\alpha-\alpha$ (Rys.2.7.12.) należy zrzuć na kierunek przekroju (czyli siły równoległe do osi y musimy pomnożyć przez $\cos\varphi$ a równoległe do osi x przez $\sin\varphi$, gdzie φ – kąt nachylenia stycznej do krzywej w punkcie, w którym wyznaczamy siłę T_α – Rys.2.7.12.).

Analogicznie aby znaleźć wartość siły podłużnej N_α w danym przekroju α , która jest równa sumie algebraicznej wszystkich sił zewnętrznych leżących po jednej stronie analizowanego przekroju zrzuconych kierunek normalny do przekroju, wszystkie siły równoległe do osi y mnożymy przez $\sin\varphi$ a równoległe do osi x przez $\cos\varphi$ (φ – kąt nachylenia stycznej do krzywej w punkcie, w którym wyznaczamy siłę N_α – Rys.2.7.12.).



Rys.2.7.12.

Równanie łuku parabolicznego w układzie xy przedstawionym na Rys.2.7.12 ma postać:

$$y = \frac{4(6l)}{(4l)^2} \cdot x \cdot (4l - x) = 6x - \frac{3}{2} \frac{x^2}{l}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = 6 - 3 \frac{x}{l}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left[6 - 3 \frac{x}{l} \right]$$

$$\sin \varphi = \left(6 - 3 \frac{x}{l} \right) \cos \varphi$$

Przedział A-B $0 \leq x < 4l$ $0 \leq y < 6l$

$$T_{\alpha} = R_{Ay} \cos \varphi - R_{Ax} \sin \varphi - q x \cos \varphi = 2ql \cos \varphi - \frac{ql}{3} \sin \varphi - qx \cos \varphi = 0$$

$$N_{\alpha} = -R_{Ay} \sin \varphi - R_{Ax} \cos \varphi + qx \sin \varphi = -2ql \sin \varphi - \frac{ql}{3} \cos \varphi + qx \sin \varphi$$

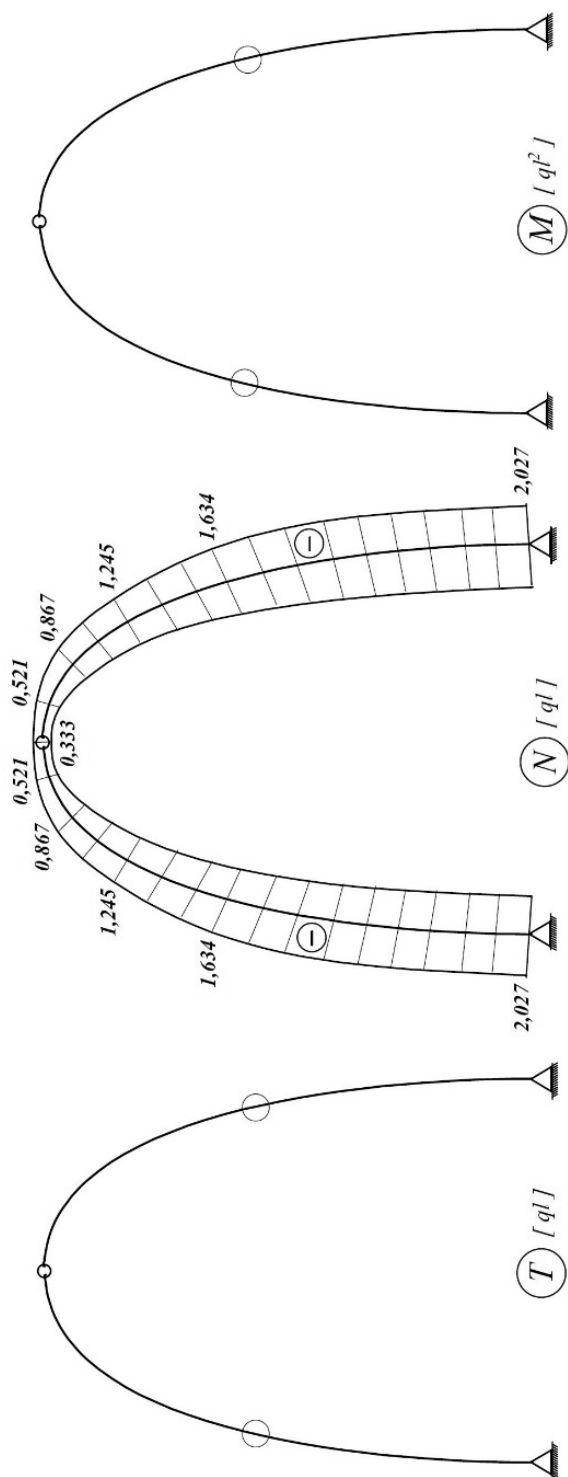
$$M_{\alpha} = R_{Ay}x - R_{Ax}y - qx \frac{x}{2} = 2qlx - \frac{ql}{3} \left(6x - \frac{3x^2}{l} \right) - qx \frac{x}{2} = 0$$

Tabela 2.7.2. Wartości sił wewnętrznych w punktach charakterystycznych

Punkt	x [l]	y [l]	φ [rad]	T_{α} [ql]	N_{α} [ql]	M_{α} [ql²]
A	0	0	1,405648	0	-2,02759	0
1	0,4	2,16	1,365401	0	-1,63435	0
2	0,8	3,84	1,299849	0	-1,24544	0
3	1,2	5,04	1,176005	0	-0,86667	0
4	1,6	5,76	0,876058	0	-0,52068	0
C	2	6	0	0	-0,33333	0
5	2,4	5,76	-0,87606	0	-0,52068	0
6	2,8	5,04	-1,17601	0	-0,86667	0
7	3,2	3,84	-1,29985	0	-1,24544	0
8	3,6	2,16	-1,3654	0	-1,63435	0
A	4	0	-1,40565	0	-2,02759	0

Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys. 2.7.13.

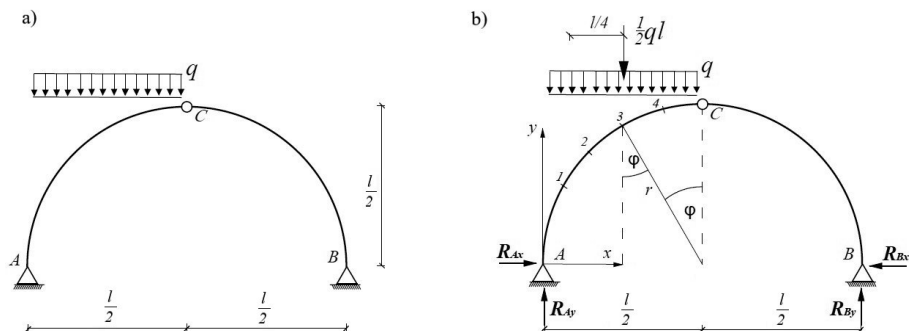
- Wniosek: Jeżeli łuk paraboliczny obciążony jest wyłącznie obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym (Rys.2.7.11.) to powstają w nim wyłącznie siły normalne. Dlatego też, łuki paraboliczne powinny być stosowane zwłaszcza wtedy gdy obciążenie takie jest dominujące.



Rys.2.7.13.

Przykład 2.7.3.

Dla łuku kołowego przedstawionego na Rys.2.7.14.a. sporządzić wykresy sił wewnętrznych.



Rys.2.7.14.

1. Stopień statycznej niewyznaczalności $n=4+2-3\cdot 2=0$

2. Obliczenie reakcji (Rys.2.7.14.b.):

$$\sum M_A = 0; \quad R_{By} \cdot l - \frac{1}{2}ql \cdot \frac{l}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{By} = \frac{1}{8}ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -\frac{1}{2}ql + R_{Ay} + R_{By} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ay} = \frac{3}{8}ql$$

$$\sum M_C^P = 0; \quad R_{By} \cdot \frac{1}{2}l - R_{Bx} \cdot \frac{1}{2}l = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Bx} = \frac{1}{8}ql$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} - R_{Bx} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ax} = \frac{1}{8}ql$$

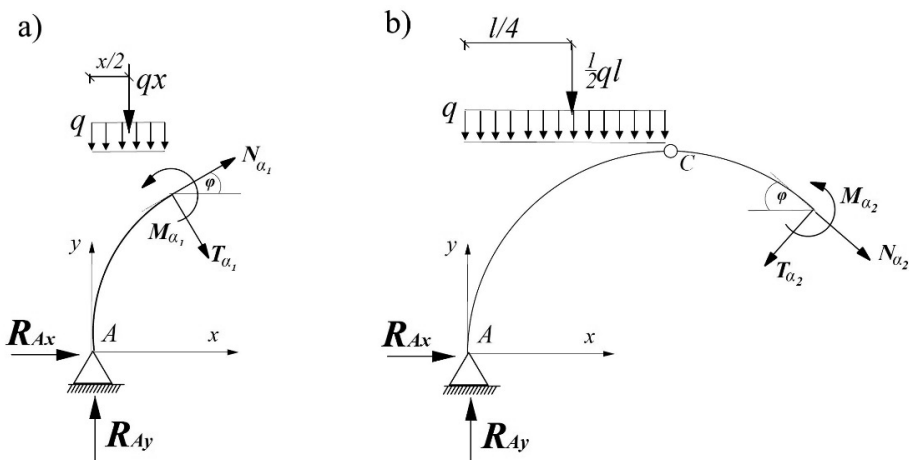
3. Równania sił wewnętrznych (Rys.2.7.15.)

Równanie łuku kołowego w układzie xy przedstawionym na Rys.2.7.14 ma postać:

$$y = \sqrt{xl - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{l-2x}{2\sqrt{xl-x^2}} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \left[\frac{l-2x}{2\sqrt{xl-x^2}} \right] \text{ i } (x \neq 0 \text{ oraz } x \neq l)$$

$$\text{dla } x=0 \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{dla } x=l \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$



Rys.2.7.15.

Przedział A-C $0 \leq x < \frac{1}{2}l$ $0 \leq y < \frac{1}{2}l$ (Rys.2.7.15.a.)

$$T_{\alpha_1} = R_{Ay} \cos \varphi - R_{Ax} \sin \varphi - qx \cos \varphi = \frac{3ql}{8} \cos \varphi - \frac{ql}{8} \sin \varphi - qx \cos \varphi$$

$$N_{\alpha_1} = -R_{Ay} \sin \varphi - R_{Ax} \cos \varphi + qx \sin \varphi = -\frac{3ql}{8} \sin \varphi - \frac{ql}{8} \cos \varphi + qx \sin \varphi$$

$$M_{\alpha_1} = R_{Ay}x - R_{Ax}y - qx \frac{x}{2} = \frac{3ql}{8}x - \frac{ql}{8}y - qx \frac{x}{2}$$

Przedział C-B $\frac{1}{2}l \leq x < l$ $\frac{1}{2}l \geq y > 0$ (Rys.2.7.15.b.)

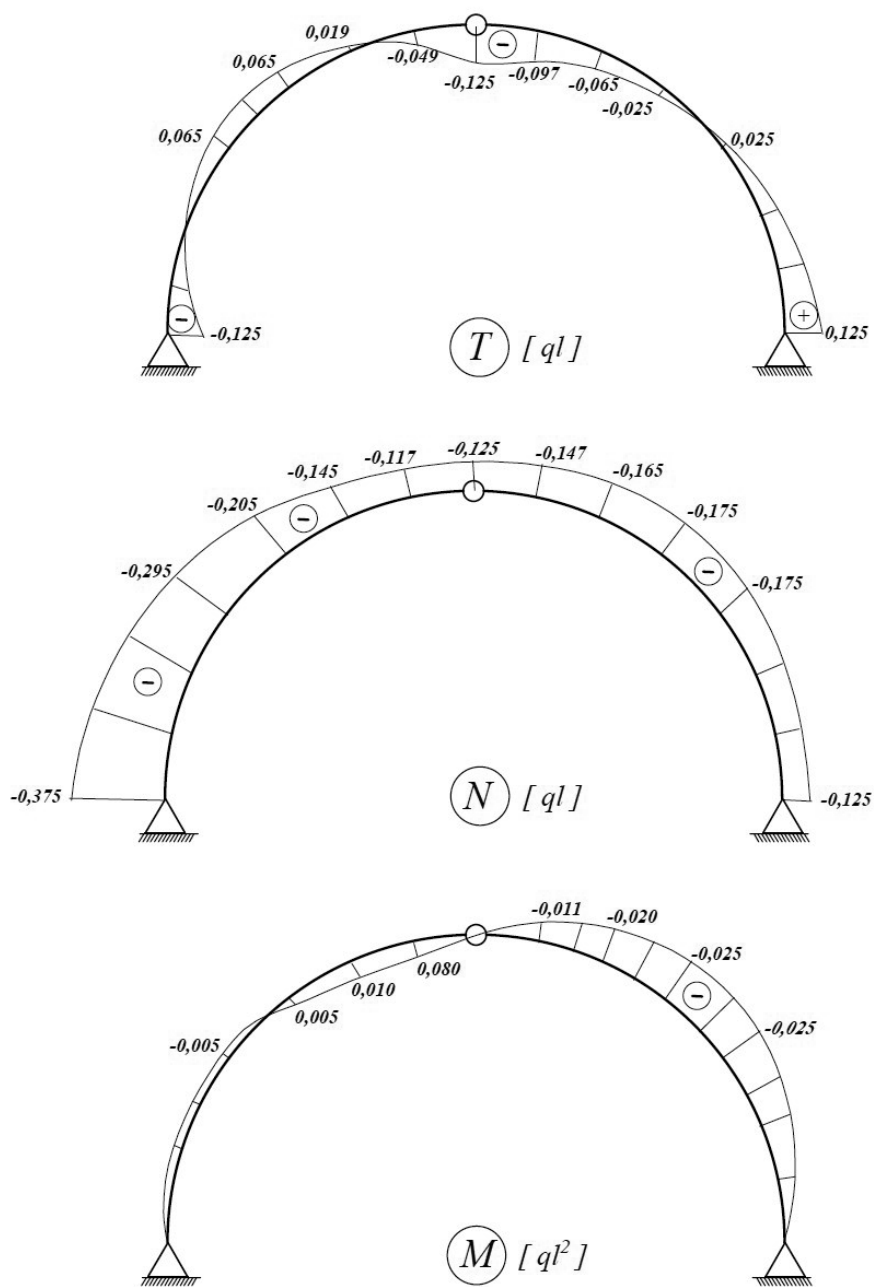
$$T_{\alpha_2} = R_{Ay} \cos \varphi - R_{Ax} \sin \varphi - q \frac{l}{2} \cos \varphi$$

$$= \frac{3ql}{8} \cos \varphi - \frac{ql}{8} \sin \varphi - q \frac{l}{2} \cos \varphi = -\frac{ql}{8} \cos \varphi - \frac{ql}{8} \sin \varphi$$

$$N_{\alpha_2} = -R_{Ay} \sin \varphi - R_{Ax} \cos \varphi + q \frac{l}{2} \sin \varphi$$

$$= -\frac{3ql}{8} \sin \varphi - \frac{ql}{8} \cos \varphi + q \frac{l}{2} \sin \varphi = \frac{ql}{8} \sin \varphi - \frac{ql}{8} \cos \varphi$$

$$M_{\alpha_2} = R_{Ay}x - R_{Ax}y - q \frac{l}{2} \left(x - \frac{l}{4} \right) = \frac{3ql}{8}x - \frac{ql}{8}y - q \frac{l}{2} \left(x - \frac{l}{4} \right)$$



Rys.2.7.16.

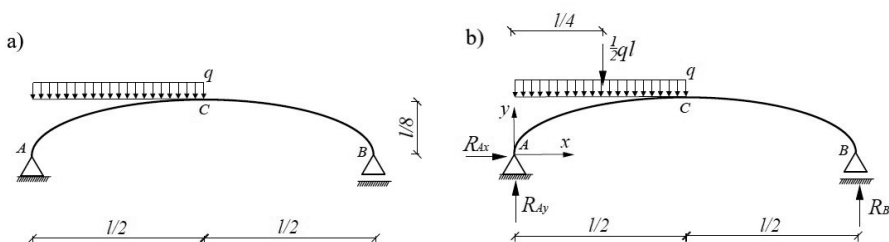
Tabela 2.7.3. Wartości sił wewnętrznych w punktach charakterystycznych

Punkt	x [l]	y [l]	φ [rad]	T_α [ql]	N_α [ql]	M_α [ql ²]
A	0	0	1,570796	-0,125	-0,375	0
1	0,1	0,3	0,927295	0,065	-0,295	-0,005
2	0,2	0,4	0,643501	0,065	-0,205	0,005
3	0,3	0,458258	0,411517	0,018738635	-0,14456	0,010218
4	0,4	0,489898	0,201358	-0,0494949	-0,11747	0,008763
C	0,5	0,5	0	-0,125	-0,125	0
5	0,6	0,489898	-0,20136	-0,09747449	-0,14747	-0,01124
6	0,7	0,458258	-0,41152	-0,06456439	-0,16456	-0,01978
7	0,8	0,4	-0,6435	-0,025	-0,175	-0,025
8	0,9	0,3	-0,9273	0,025	-0,175	-0,025
A	1	0	-1,5708	0,125	-0,125	0

Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys. 2.7.16.

Przykład 2.7.4.

Dla łuku eliptycznego przedstawionego na Rys.2.7.17.a. sporządzić wykresy sił wewnętrznych.



Rys.2.7.17.

1. Stopień statycznej niewyznaczalności $n=0$

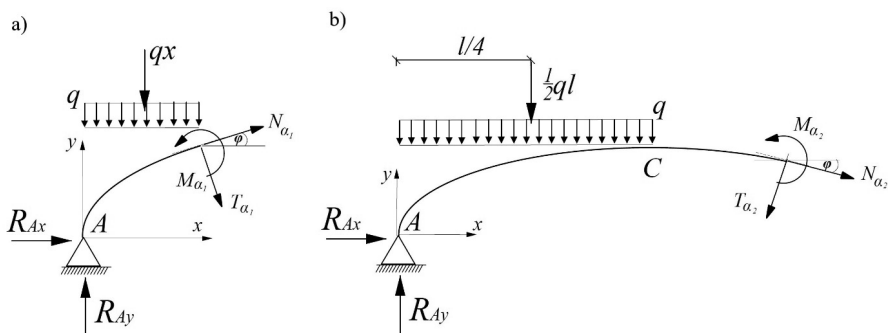
2. Obliczenie reakcji (Rys.2.7.17.b.):

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot l - \frac{1}{2}ql \cdot \frac{l}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad R_B = \frac{1}{8}ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -\frac{1}{2}ql + R_{Ay} + R_B = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ay} = \frac{3}{8}ql$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} = 0$$

3. Równania sił wewnętrznych (Rys.2.7.18.)



Rys.2.7.18.

Równanie łuku eliptycznego w układzie xy przedstawionym na Rys.2.7.17 ma postać:

$$y = \frac{1}{4} \sqrt{x l - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{l-2x}{8\sqrt{x l - x^2}} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \left[\frac{l-2x}{8\sqrt{x l - x^2}} \right] \text{ i } (x \neq 0 \text{ oraz } x \neq l)$$

$$\text{dla } x=0 \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{dla } x=l \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Przedział A-C $0 \leq x < \frac{1}{2}l$ $0 \leq y < \frac{1}{8}l$ (Rys.2.7.18.a.)

$$T_{\alpha_1} = R_{Ay} \cos \varphi - q x \cos \varphi = \frac{3ql}{8} \cos \varphi - q x \cos \varphi$$

$$T_{\alpha_1} = 0 \rightarrow x = \frac{3}{8}l$$

$$N_{\alpha_1} = -R_{Ay} \sin \varphi + q x \sin \varphi = -\frac{3ql}{8} \sin \varphi + q x \sin \varphi$$

$$M_{\alpha_1} = R_{Ay} x - q x \frac{x}{2} = \frac{3ql}{8} x - q x \frac{x}{2}$$

$$\text{Ekstremum momentu: } M_{\alpha_1} \left(x = \frac{3l}{8} \right) = \frac{3ql}{8} \cdot \frac{3l}{8} - \frac{q}{2} \left(\frac{3l}{8} \right)^2 = \frac{9}{128} q l^2$$

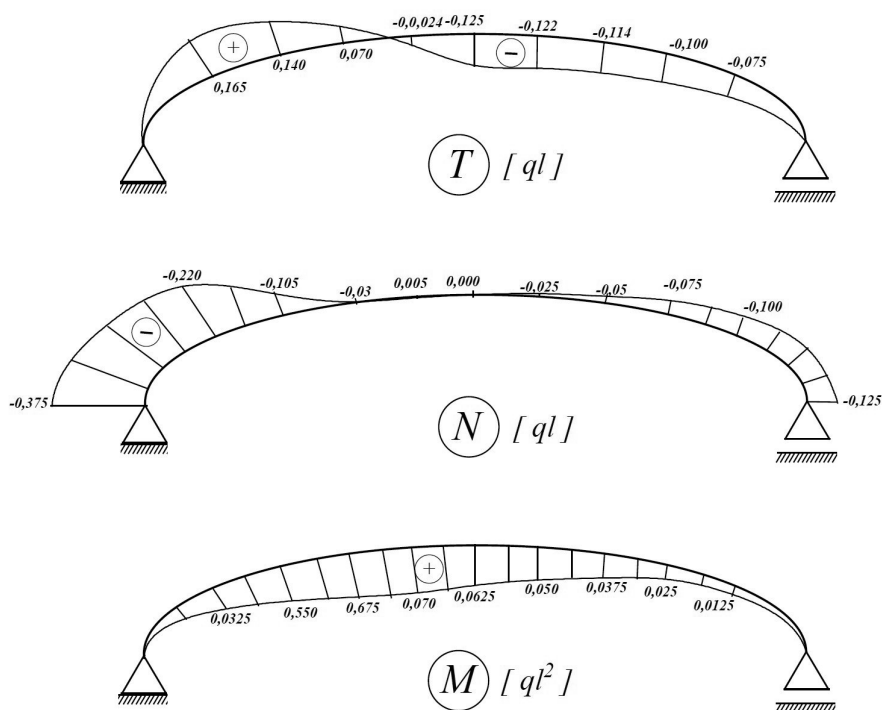
Przedział C-B $\frac{1}{2}l \leq x < l$ $\frac{1}{8}l \geq y > 0$ (Rys.2.7.18.b.)

$$T_{\alpha_2} = R_{Ay} \cos \varphi - q \frac{l}{2} \cos \varphi = \frac{3ql}{8} \cos \varphi - q \frac{l}{2} \cos \varphi = -\frac{ql}{8} \cos \varphi$$

$$N_{\alpha_2} = -R_{Ay} \sin \varphi + q \frac{l}{2} \sin \varphi = -\frac{3ql}{8} \sin \varphi + q \frac{l}{2} \sin \varphi = \frac{ql}{8} \sin \varphi$$

$$M_{\alpha_2} = R_{Ay} x - q \frac{l}{2} \left(x - \frac{l}{4} \right) = \frac{3ql}{8} x - q \frac{l}{2} \left(x - \frac{l}{4} \right)$$

Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys. 2.7.19.



Rys.2.7.19.

Tabela 2.7.4. Wartości sił wewnętrznych w punktach charakterystycznych

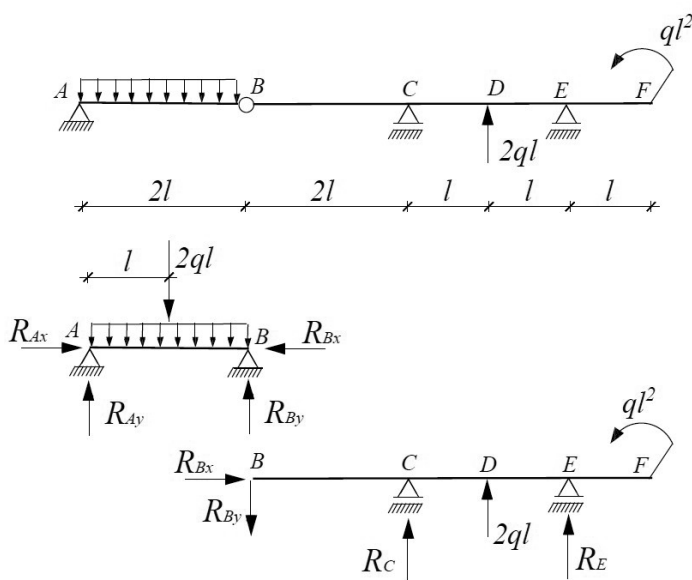
Punkt	x [l]	y [l]	φ [rad]	T_{α} $[ql]$	N_{α} $[ql]$	M_{α} $[ql^2]$
A	0	0	1,570796	0	-0,375	0
1	0,1	0,075	0,927295	0,165	-0,22	0,0325
2	0,2	0,1	0,643501	0,14	-0,105	0,055
3	0,3	0,114564	0,411517	0,068738635	-0,03	0,0675
4	0,4	0,122474	0,201358	-0,0244949	0,005	0,07
C	0,5	0,125	0	-0,125	0	0,0625
5	0,6	0,122474	-0,20136	-0,12247449	-0,025	0,05
6	0,7	0,114564	-0,41152	-0,11456439	-0,05	0,0375
7	0,8	0,1	-0,6435	-0,1	-0,075	0,025
8	0,9	0,075	-0,9273	-0,075	-0,1	0,0125
A	1	0	-1,5708	0	-0,125	0

Rozdział 3

3. Rozwiązania zadań

3.1. Rozwiązania zadań z rozdziału 2.4.2.

a)



Rys.3.1.1.

$$1. \quad n = r + s - 3t = 4 + 2 - 3 \cdot 2 = 0$$

2. Wyznaczenie reakcji

$$R_{Ax} = R_{Bx} = 0$$

- belka lewa:

$$\sum M_{(A)} = 0; \quad -2ql \cdot l + R_{By} \cdot 2l = 0 \quad R_{By} = ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{Ay} - 2ql + R_{By} = 0 \quad R_{Ay} = ql$$

- belka prawa:

$$\sum M_{(C)} = 0; \quad R_{By} \cdot 2l + 2ql \cdot l + R_E \cdot 2l + ql^2 = 0 \quad R_E = -\frac{5}{2}ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -R_{By} + R_C + 2ql + R_E = 0 \quad R_C = \frac{3}{2}ql$$

3. Równania sił wewnętrznych w poszczególnych przedziałach (Rys. 3.1.2.)

Przedział A-B $0 \leq x_1 < 2l$

$$T(x_1) = ql - qx_1$$

$$T(x_1 = 0) = ql \quad T(x_1 = 2l) = -ql$$

$$T(x_1) = 0 \rightarrow ql - qx_1 = 0 \rightarrow x_1 = l$$

$$M(x_1) = ql \cdot x_1 - qx_1 \cdot \frac{x_1}{2} = ql \cdot x_1 - q \cdot \frac{(x_1)^2}{2}$$

$$M(x_1 = 0) = 0 \quad M(x_1 = 2l) = 0$$

$$M(x_1 = l) = ql \cdot l - q \cdot \frac{(l)^2}{2} = \frac{1}{2}ql^2$$

$$N(x_1) = 0$$

Przedział B-C $0 \leq x_2 < 2l$

$$T(x_2) = -ql$$

$$M(x_2) = -ql \cdot x_2$$

$$M(x_2 = 0) = 0 \quad M(x_2 = 2l) = -2ql^2$$

$$N(x_2) = 0$$

Przedział C-D $0 \leq x_3 < l$

$$T(x_3) = -ql + \frac{3}{2}ql = \frac{1}{2}ql$$

$$M(x_3) = -ql \cdot (2l + x_3) + \frac{3}{2}ql \cdot x_3$$

$$M(x_3 = 0) = -2ql^2 \quad M(x_3 = l) = -\frac{3}{2}ql^2$$

$$N(x_3) = 0$$

Przedział E-D $0 \leq x_4 < l$

$$T(x_4) = \frac{5}{2}ql$$

$$M(x_4) = ql^2 - \frac{5}{2}ql \cdot x_4$$

$$M(x_4 = 0) = ql^2 \quad M(x_4 = l) = -\frac{3}{2}ql^2$$

$$N(x_4) = 0$$

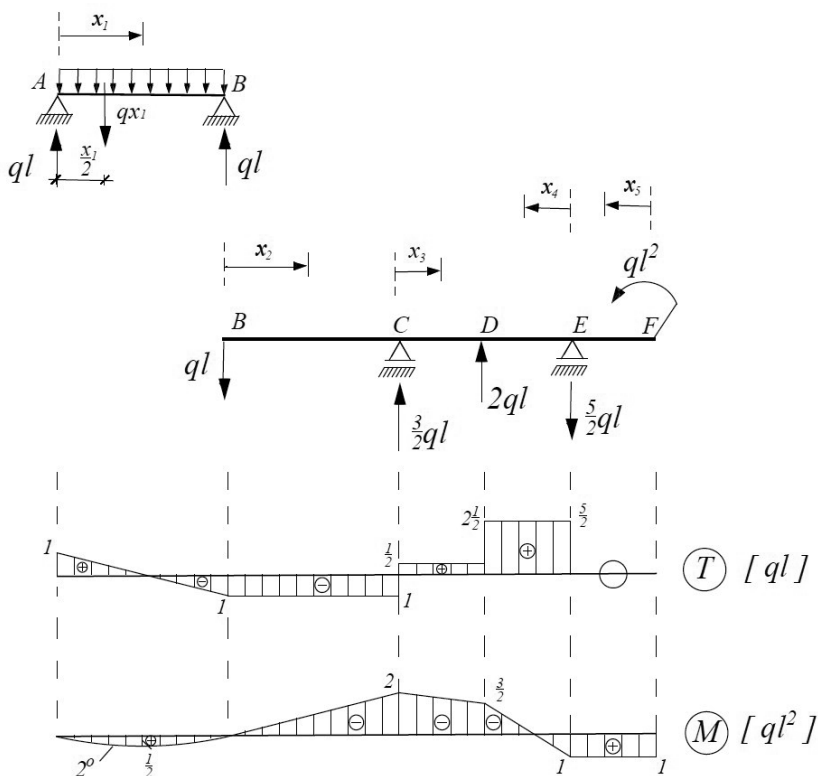
Przedział FE $0 \leq x_5 < l$

$$T(x_5) = 0$$

$$M(x_5) = ql^2$$

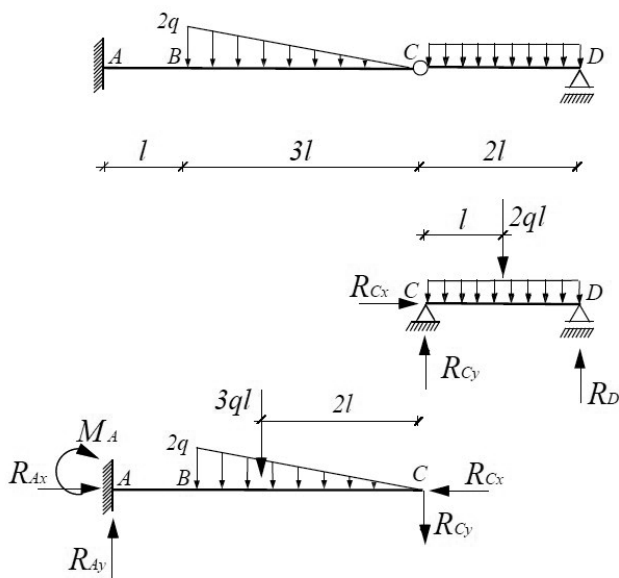
$$N(x_5) = 0$$

Wykresy sił wewnętrznych (Rys. 3.1.2.).



Rys. 3.1.2.

b)



Rys. 3.1.3.

$$1. \quad n = r + s - 3t = 4 + 2 - 3 \cdot 2 = 0$$

2. Wyznaczenie reakcji podpór (Rys. 3.1.3.).

$$R_{Cx} = R_{Ax} = 0$$

- belka prawa:

$$\sum M_{(C)} = 0; \quad R_D \cdot 2l - 2ql \cdot l = 0 \quad R_D = ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_D - 2ql + R_{Cy} = 0 \quad R_{Cy} = ql$$

- belka lewa:

$$\sum M_{(A)} = 0; \quad -M_A - 3ql \cdot 2l - R_{Cy} \cdot 4l = 0 \quad M_A = -10 ql^2$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -R_{Cy} - 3ql + R_{Ay} = 0 \quad R_{Ay} = 4ql$$

3. Równania sił wewnętrznych: (Rys. 3.1.4.):

Przedział A-B $0 \leq x_1 < l$

$$T(x_1) = 4ql$$

$$M(x_1) = -10ql^2 + 4ql \cdot x_1$$

$$M(x_1 = 0) = -10ql^2 \quad M(x_1 = l) = -6ql^2$$

$$N(x_1) = 0$$

Przedział CB $0 \leq x_2 < 3l$

$$\frac{q(x_2)}{x_2} = \frac{2q}{3l} \rightarrow q(x_2) = \frac{2qx_2}{3l}$$

$$T(x_2) = ql + \frac{1}{2}q(x_2) \cdot x_2 = ql + \frac{1}{2} \cdot \frac{2qx_2}{3l} \cdot x_2 = ql + \frac{qx_2^2}{3l}$$

$$T(x_2 = 0) = ql \quad T(x_2 = 3l) = 4ql$$

$$\begin{aligned} M(x_2) &= -ql \cdot x_2 - \frac{1}{2}q(x_2) \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{3} = -ql \cdot x_2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2qx_2}{3l} \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{3} = \\ &= -ql \cdot x_2 - q \cdot \frac{(x_2)^3}{9l} \end{aligned}$$

$$M(x_2 = 0) = 0 \quad M(x_2 = 3l) = -6ql^2$$

$$N(x_2) = 0$$

Przedział C-D $0 \leq x_3 < 2l$

$$T(x_3) = ql - qx_3$$

$$T(x_3 = 0) = ql \quad T(x_3 = 2l) = -ql$$

$$T(x_3) = 0 \rightarrow ql - qx_3 = 0 \rightarrow x_3 = l$$

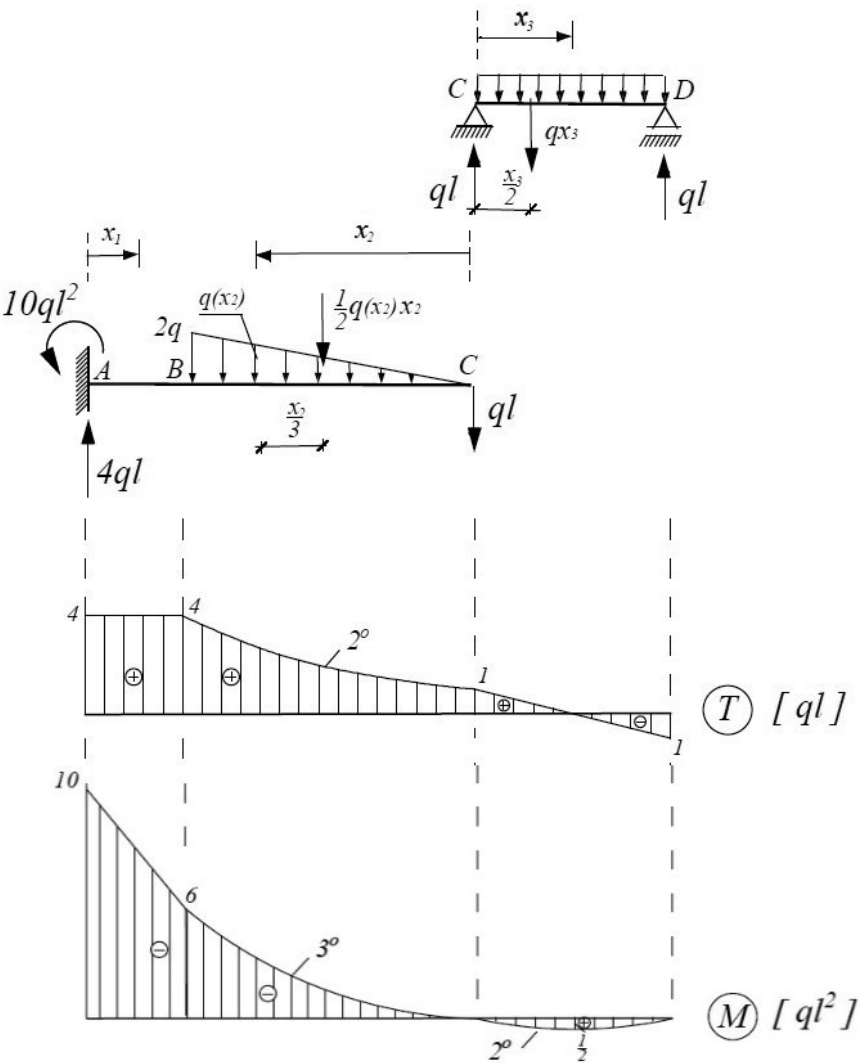
$$M(x_3) = ql \cdot x_3 - qx_3 \cdot \frac{x_3}{2} = ql \cdot x_3 - q \cdot \frac{(x_3)^2}{2}$$

$$M(x_3 = 0) = 0 \quad M(x_3 = 2l) = 0$$

$$M(x_3 = l) = ql \cdot l - q \cdot \frac{(l)^2}{2} = \frac{1}{2}ql^2$$

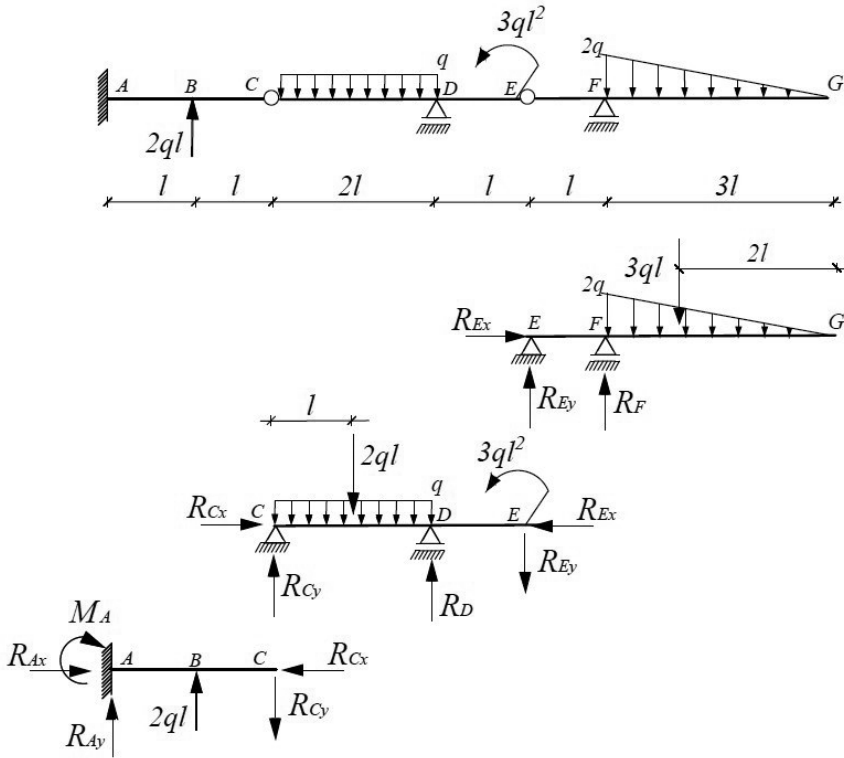
$$N(x_3) = 0$$

Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys.3.1.4. Wykres sił podłużnych $N(x)=0$



Rys. 3.1.4.

c)



Rys. 3.1.5.

$$1. \quad n = r + s - 3t = 5 + 4 - 3 \cdot 3 = 0$$

2. Obliczenie reakcji:

$$R_{Ax} = R_{Cx} = R_{Ex} = 0$$

- belka prawa:

$$\sum M_{(F)} = 0; \quad -R_{Ey} \cdot l - 3ql \cdot l = 0 \quad R_{Ey} = -3ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{Ey} + R_F - 3ql = 0 \quad R_F = 6ql$$

- belka środkowa:

$$\sum M_{(D)} = 0; \quad -R_{Cy} \cdot 2l + 2ql \cdot l - R_{Ey} \cdot l + 3ql^2 = 0 \quad R_{Cy} = 4ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{Cy} + R_D - R_{Ey} - 2ql = 0 \quad R_D = -5ql$$

- belka lewa:

$$\sum M_{(A)} = 0; \quad -M_A + 2ql \cdot l - R_{Cy} \cdot 2l = 0 \quad M_A = -6ql^2$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -R_{Cy} + 2ql + R_{Ay} = 0 \quad R_{Ay} = 2ql$$

3. Równania sił wewnętrznych w poszczególnych przedziałach:

Przedział AB $0 \leq x_1 < l$

$$T(x_1) = 2ql$$

$$M(x_1) = -6ql^2 + 2ql \cdot x_1$$

$$M(x_1 = 0) = -6ql^2 \quad M(x_1 = l) = -4ql^2$$

$$N(x_1) = 0$$

Przedział CB $0 \leq x_2 < l$

$$T(x_2) = 4ql$$

$$M(x_2) = -4ql \cdot x_2$$

$$M(x_2 = 0) = 0 \quad M(x_2 = l) = -4ql^2$$

$$N(x_2) = 0$$

Przedział CD $0 \leq x_3 < 2l$

$$T(x_3) = 4ql - qx_3$$

$$T(x_3 = 0) = 4ql \quad T(x_3 = 2l) = 2ql$$

$$M(x_3) = 4ql \cdot x_3 - qx_3 \cdot \frac{x_3}{2} = 4ql \cdot x_3 - q \cdot \frac{(x_3)^2}{2}$$

$$M(x_3 = 0) = 0 \quad M(x_3 = 2l) = 6ql^2$$

$$N(x_3) = 0$$

Przedział ED $0 \leq x_4 < l$

$$T(x_4) = -3ql$$

$$M(x_4) = 3ql^2 + 3ql \cdot x_4$$

$$M(x_4 = 0) = 3ql^2 \quad M(x_4 = l) = 6ql^2$$

$$N(x_4) = 0$$

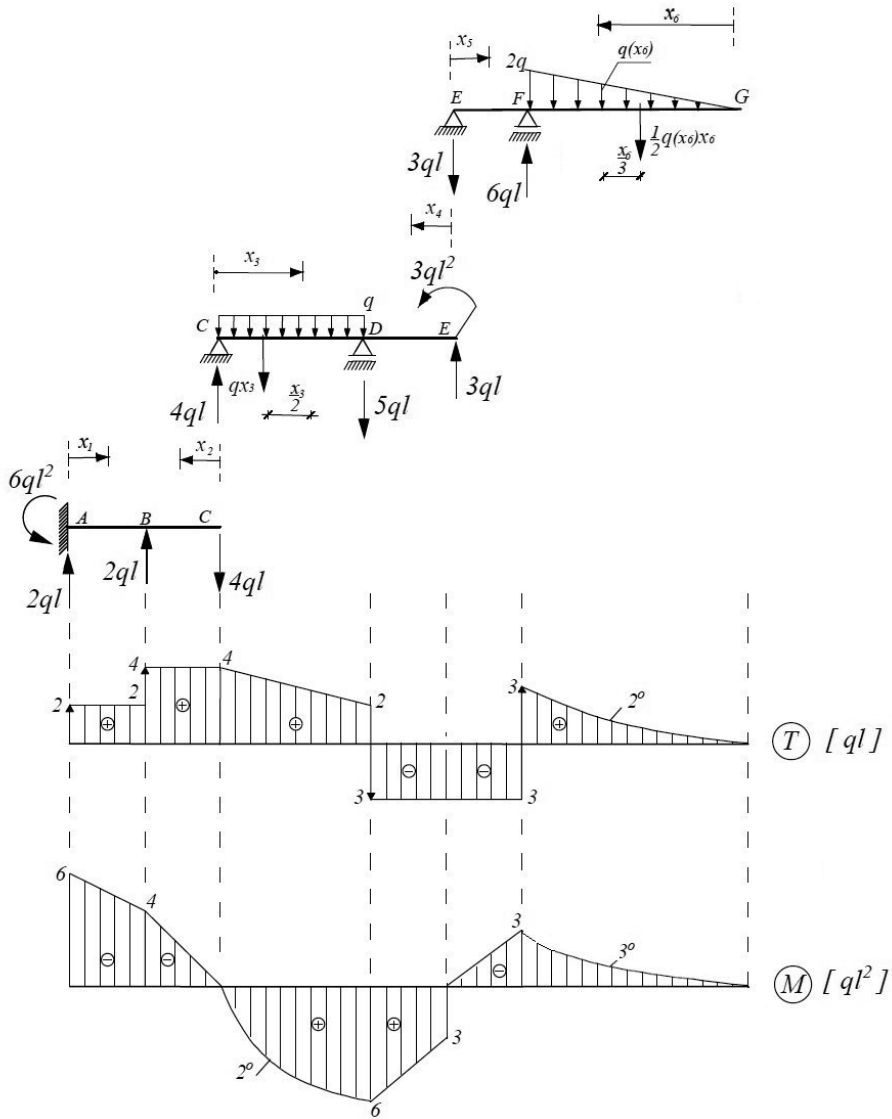
Przedział EF $0 \leq x_5 < l$

$$T(x_5) = -3ql$$

$$M(x_5) = -3ql \cdot x_5$$

$$M(x_5 = 0) = 0 \quad M(x_5 = l) = -3ql^2$$

$$N(x_5) = 0$$



Rys. 3.1.6.

Przedział GF $0 \leq x_6 < 3l$

$$\frac{q(x_6)}{x_6} = \frac{2q}{3l} \rightarrow q(x_6) = \frac{2qx_6}{3l}$$

$$T(x_6) = \frac{1}{2} q(x_6) \cdot x_6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2qx_6}{3l} \cdot x_6 = \frac{qx_6^2}{3l}$$

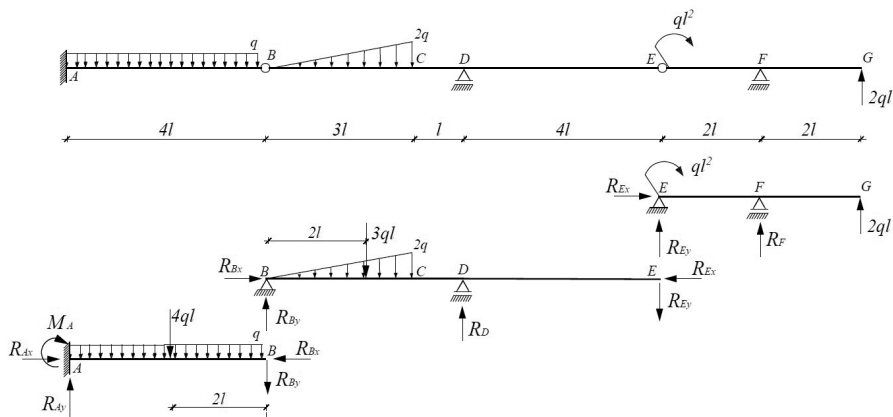
$$T(x_6 = 0) = 0 \quad T(x_6 = 3l) = 3ql$$

$$M(x_6) = -\frac{1}{2}q(x_6) \cdot x_6 \cdot \frac{x_6}{3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2qx_6}{3l} \cdot x_6 \cdot \frac{x_6}{3} = -q \cdot \frac{(x_6)^3}{9l}$$

$$M(x_6 = 0) = 0 \quad M(x_6 = 3l) = -q \cdot \frac{(3l)^3}{9l} = -3ql^2$$

$$N(x_6) = 0$$

d)



Rys. 3.1.7.

$$1. \quad n = r + s - 3t = 5 + 4 - 3 \cdot 3 = 0$$

2. Obliczenie reakcji:

Ponieważ belka nie jest obciążona na kierunku x to: $R_{Ax} = R_{Bx} = R_{Ex} = 0$

- prawa belka:

$$\sum M_{(F)} = 0; \quad -R_{Ey} \cdot 2l + 2ql \cdot 2l - ql^2 = 0 \quad R_{Ey} = \frac{3}{2} ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{Ey} + R_F + 2ql = 0 \quad R_F = -\frac{7}{2} ql$$

- środkowa belka:

$$\sum M_{(D)} = 0; \quad -R_{By} \cdot 4l + 3ql \cdot 2l - R_{Ey} \cdot 4l = 0 \quad R_{By} = 0 \quad ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{By} + R_D - R_{Ey} - 3ql = 0 \quad R_D = \frac{9}{2} ql$$

- lewa belka:

$$\sum M_{(A)} = 0; \quad -M_A - 4ql \cdot 2l - R_{By} \cdot 4l = 0 \quad M_A = -8ql^2$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -R_{By} - 4ql + R_{Ay} = 0 \quad R_{Ay} = 4ql$$

3. Równania sił wewnętrznych w poszczególnych przedziałach:

Przedział BA $0 \leq x_1 < 4l$

$$T(x_1) = qx_1$$

$$T(x_1 = 0) = 0 \quad T(x_1 = 4l) = 4ql$$

$$M(x_1) = -qx_1 \cdot \frac{x_1}{2} = -q \cdot \frac{(x_1)^2}{2}$$

$$M(x_1 = 0) = 0 \quad M(x_1 = 2l) = -2ql^2 \quad M(x_1 = 4l) = -8ql^2$$

$$N(x_1) = 0$$

Przedział BC $0 \leq x_2 < 3l$

$$\frac{q(x_2)}{x_2} = \frac{2q}{3l} \rightarrow q(x_2) = \frac{2qx_2}{3l}$$

$$T(x_2) = -\frac{1}{2}q(x_2) \cdot x_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2qx_2}{3l} \cdot x_2 = -\frac{qx_2^2}{3l}$$

$$T(x_2 = 0) = 0 \quad T(x_2 = 3l) = -3ql$$

$$M(x_2) = -\frac{1}{2}q(x_2) \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2qx_2}{3l} \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{3} = -q \cdot \frac{(x_2)^3}{9l}$$

$$M(x_2 = 0) = 0 \quad M(x_2 = 3l) = -q \cdot \frac{(3l)^3}{9l} = -3ql^2$$

$$N(x_2) = 0$$

Przedział CD $0 \leq x_3 < l$

$$T(x_3) = -3ql$$

$$M(x_3) = -3ql \cdot (l + x_3)$$

$$M(x_3 = 0) = -3ql^2 \quad M(x_3 = l) = -6ql^2$$

$$N(x_3) = 0$$

Przedział ED $0 \leq x_4 < 4l$

$$T(x_4) = \frac{3}{2}ql$$

$$M(x_4) = -\frac{3}{2}ql \cdot x_4$$

$$M(x_4 = 0) = 0 \quad M(x_4 = 4l) = -6ql^2$$

$$N(x_4) = 0$$

Przedział EF $0 \leq x_5 < 2l$

$$T(x_5) = \frac{3}{2}ql$$

$$M(x_5) = ql^2 + \frac{3}{2}ql \cdot x_5$$

$$M(x_5 = 0) = ql^2 \quad M(x_5 = 2l) = 4ql^2$$

$$N(x_5) = 0$$

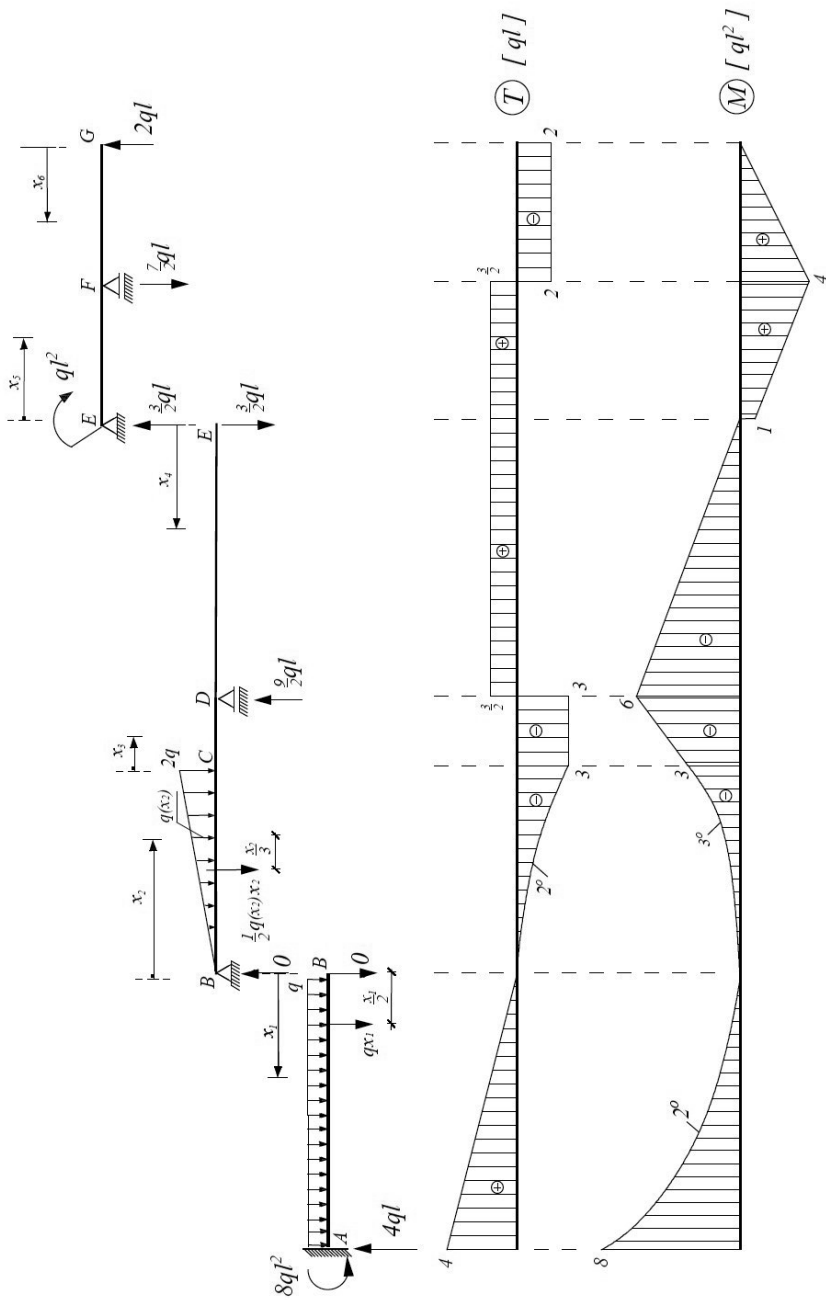
Przedział GF $0 \leq x_6 < 2l$

$$T(x_6) = -2ql$$

$$M(x_6) = 2ql \cdot x_6$$

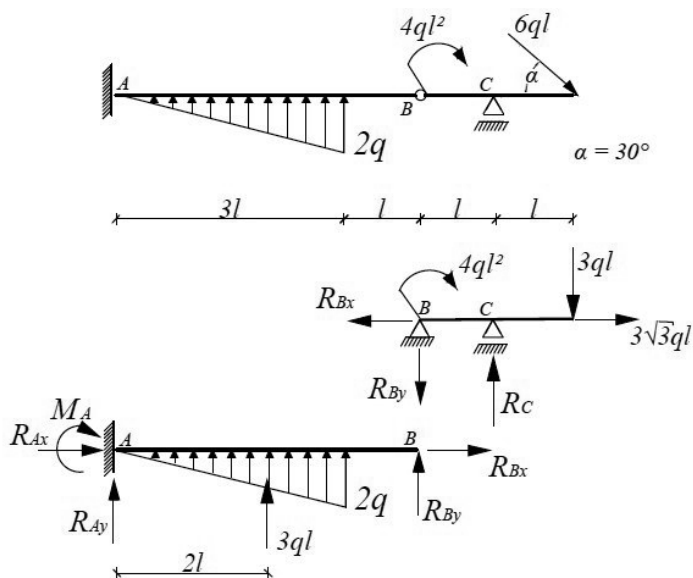
$$M(x_6 = 0) = 0 \quad M(x_6 = 2l) = 4ql^2$$

$$N(x_6) = 0$$



Rys. 3.1.8.

e)



Rys. 3.1.9.

$$1. \quad n = r + s - 3t = 4 + 2 - 3 \cdot 2 = 0$$

2. Wyznaczenie reakcji (Rys.3.1.9.):

- belka prawa:

$$\sum M_{(B)} = 0; \quad -4ql^2 - 3ql \cdot 2l + R_C \cdot l = 0 \quad \rightarrow \quad R_C = 10ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -R_{By} + R_C - 3ql = 0 \quad \rightarrow \quad R_{By} = 7ql$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -R_{Bx} + 3\sqrt{3}ql = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Bx} = 3\sqrt{3}ql$$

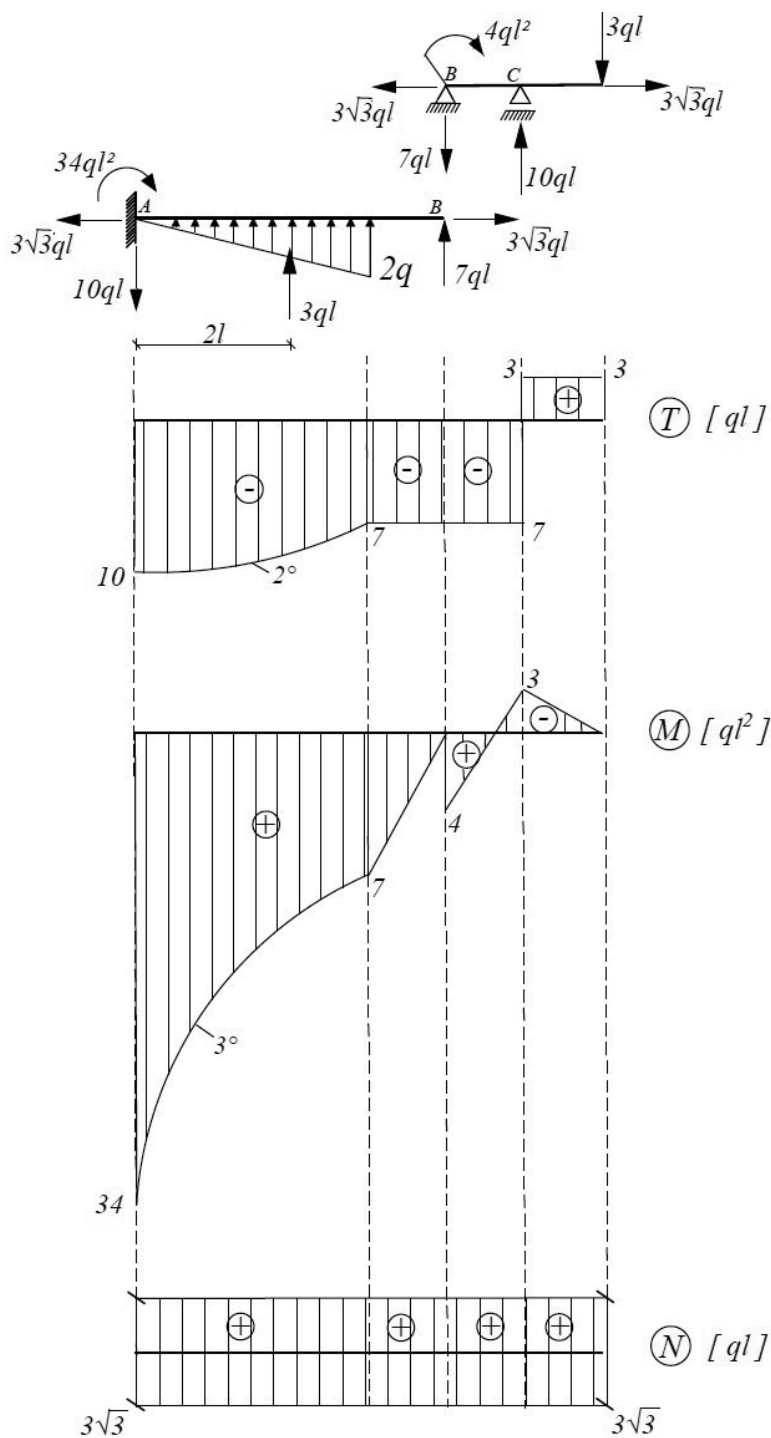
- belka lewa:

$$\sum M_{(A)} = 0; \quad -M_A + 3ql \cdot 2l + R_{By} \cdot 4l = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = 34ql^2$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{Ay} + R_{By} + 3ql = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ay} = -10ql$$

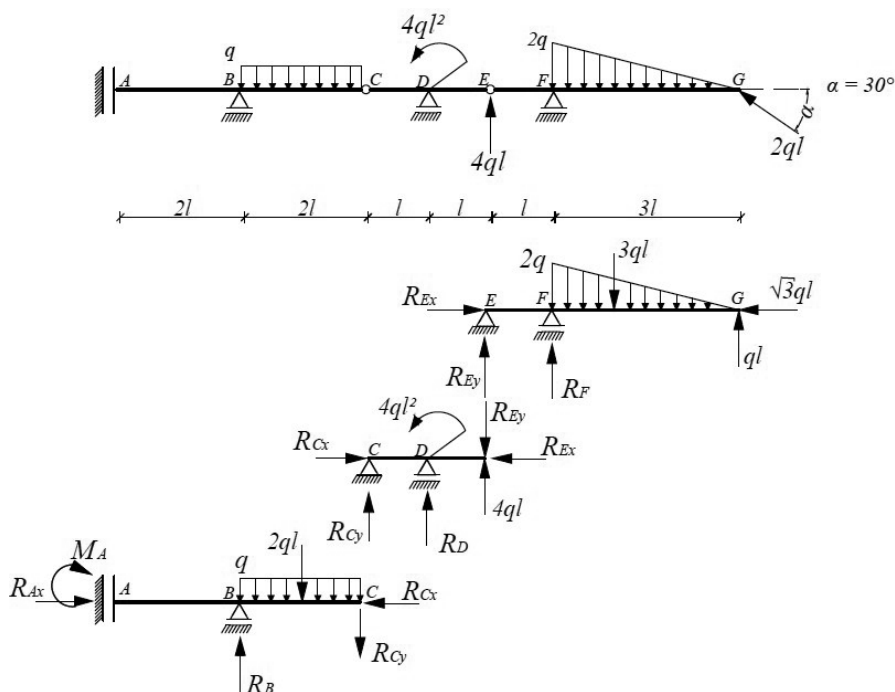
$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} + R_{Bx} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ax} = -3\sqrt{3}ql$$

Wykresy sił wewnętrznych Rys. 3.1.10.



Rys. 3.1.10.

f)



Rys. 3.1.11.

$$1. \quad n = r + s - 3t = 5 + 4 - 3 \cdot 3 = 0$$

2. Obliczenie reakcji

- prawa belka:

$$\sum M_{(F)} = 0; \quad ql \cdot 3l - 3ql \cdot l - R_{Ey} \cdot l = 0 \quad R_{Ey} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{Ey} + R_F - 3ql + ql = 0 \quad R_F = 2ql$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Ex} - \sqrt{3}ql = 0 \quad R_{Ex} = \sqrt{3}ql$$

- środkowa belka:

$$\sum M_{(D)} = 0; \quad -R_{Cy} \cdot l + 4ql^2 + 4ql \cdot l - R_{Ey} \cdot l = 0 \quad R_{Cy} = 8ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{Cy} + R_D - R_{Ey} + 4ql = 0 \quad R_D = -12ql$$

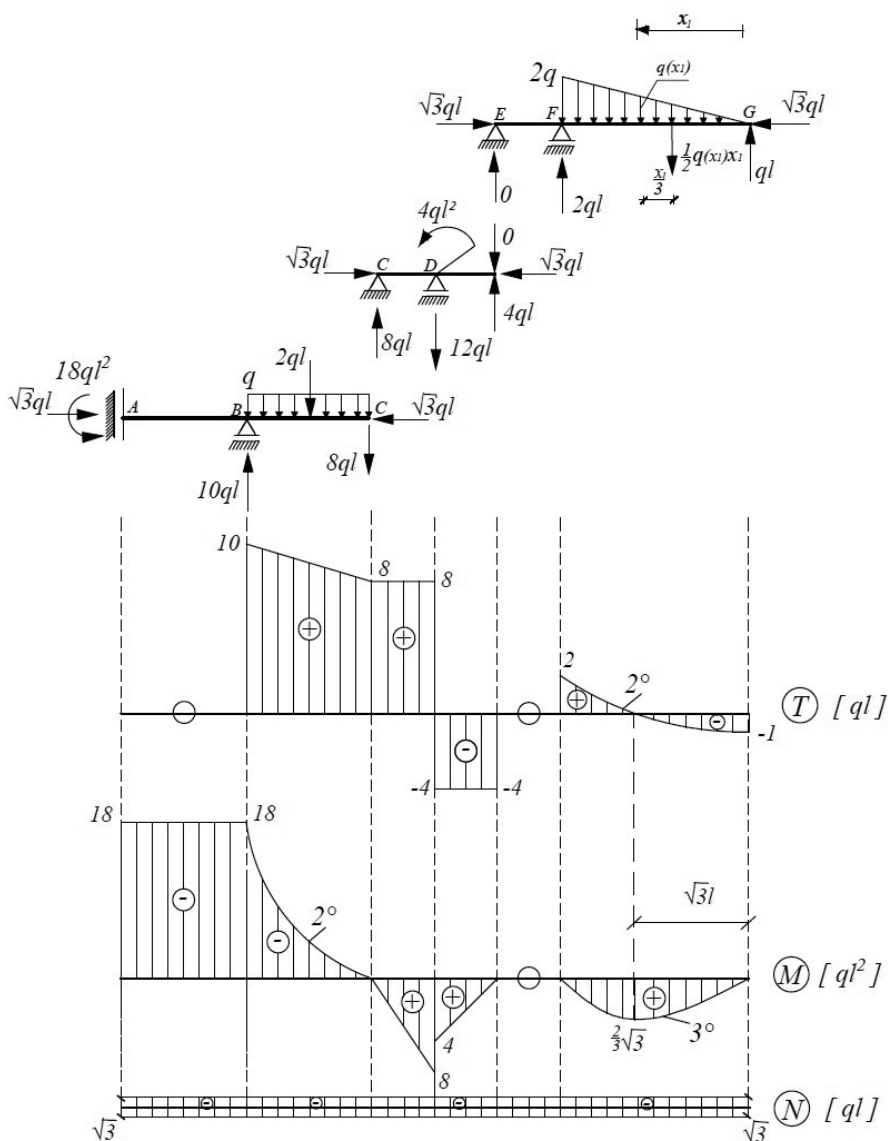
$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Cx} - R_{Ex} = 0 \quad R_{Cx} = \sqrt{3}ql$$

- lewa belka:

$$\sum M_{(B)} = 0; \quad -M_A - 2ql \cdot l - R_{Cy} \cdot 2l = 0 \quad M_A = -18 ql^2$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_B - R_{Cy} - 2ql = 0 \quad R_B = 10ql$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} - R_{Cx} = 0 \quad R_{Ax} = \sqrt{3}ql$$



Rys. 3.1.12.

Przedział GF $0 \leq x_1 < 3l$

$$\frac{q(x_1)}{x_1} = \frac{2q}{3l} \rightarrow q(x_1) = \frac{2qx_1}{3l}$$

$$T(x_1) = -ql + \frac{1}{2}q(x_1) \cdot x_1 = -ql + \frac{1}{2} \cdot \frac{2qx_1}{3l} \cdot x_1 = -ql + \frac{qx_1^2}{3l}$$

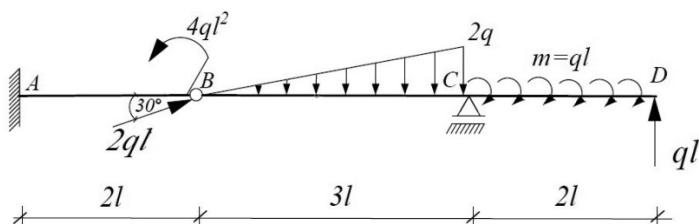
$$T(x_1 = 0) = -ql \quad T\left(x_1 = \frac{3}{2}l\right) = -\frac{1}{4}ql$$

$$T(x_1 = 3l) = 2ql$$

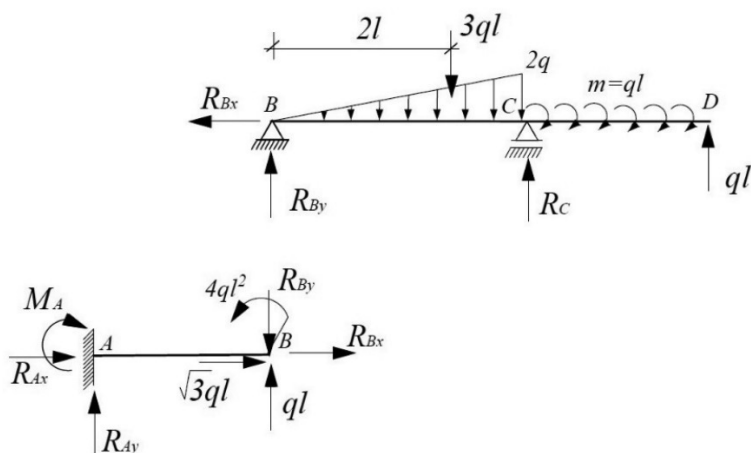
$$T(x_1) = 0 \rightarrow -ql + \frac{1}{2} \cdot \frac{2qx_1}{3l} \cdot x_1 = 0 \rightarrow 3ql^2 - qx_1^2 = 0$$

$$\rightarrow x_1 = \sqrt{3}l$$

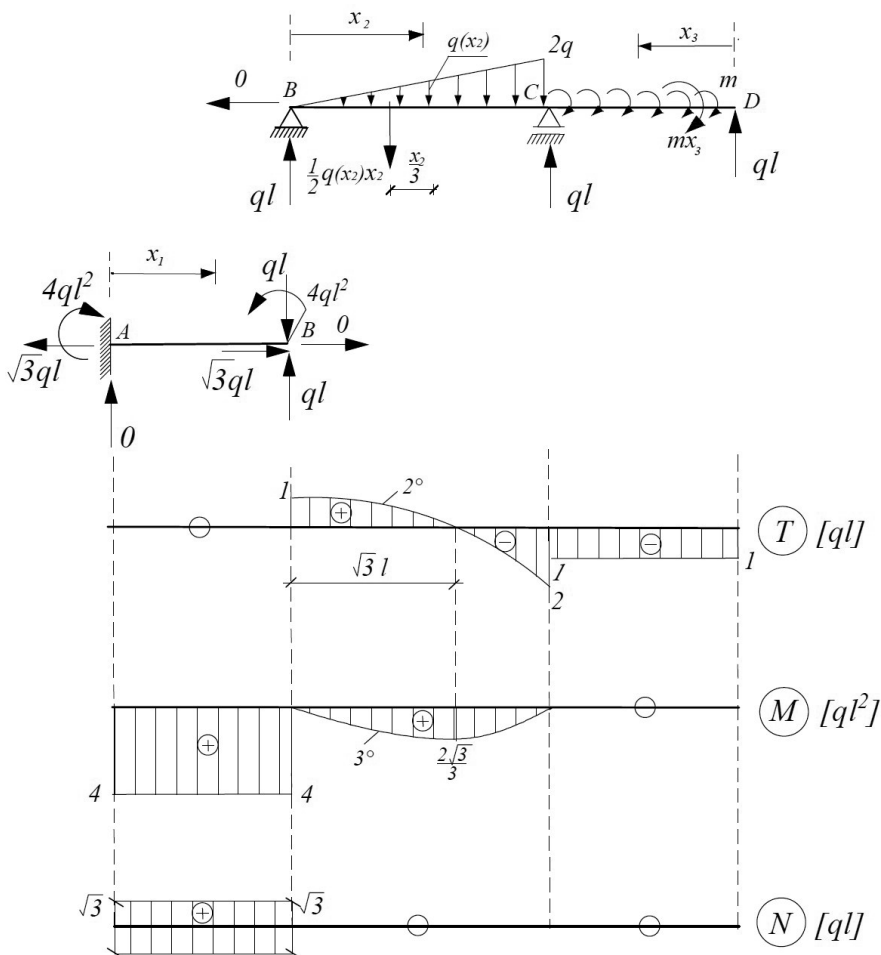
g)



Rys. 3.1.13.

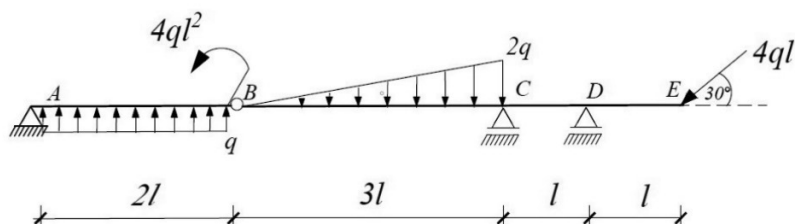


Rys.3.1.14.

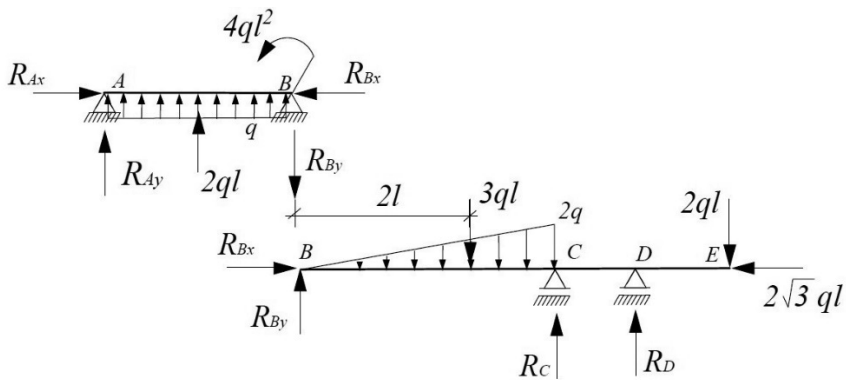


Rys.3.1.15.

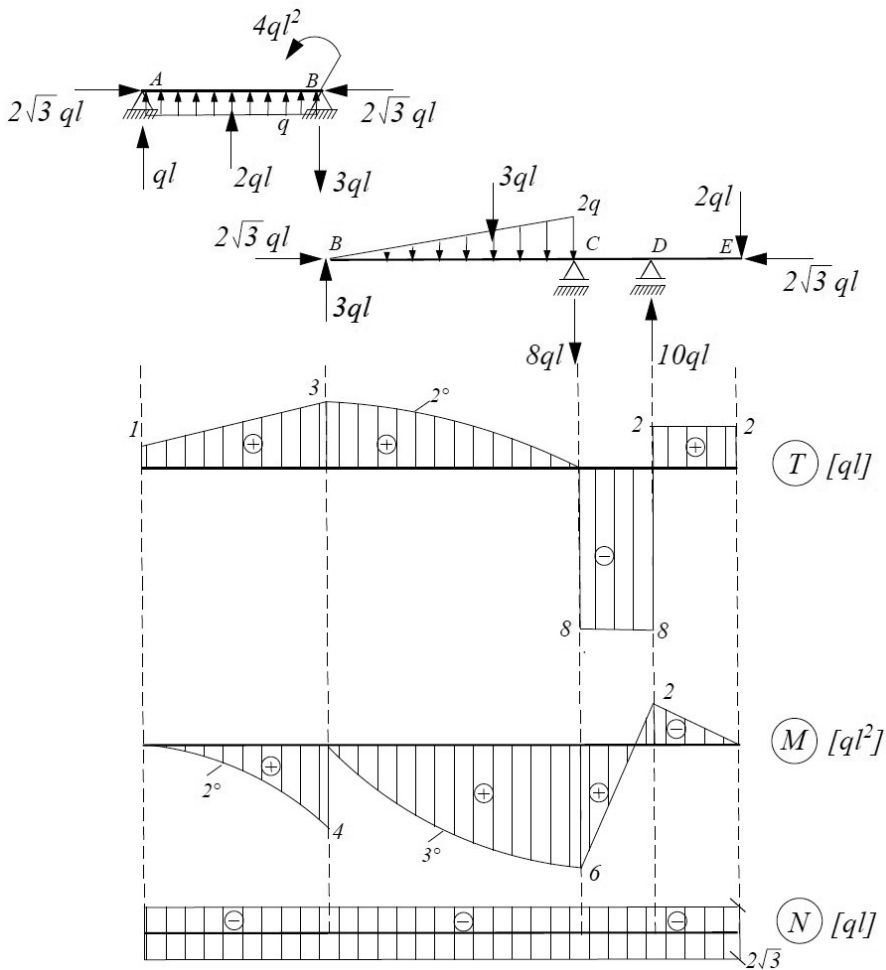
h)



Rys.3.1.16.

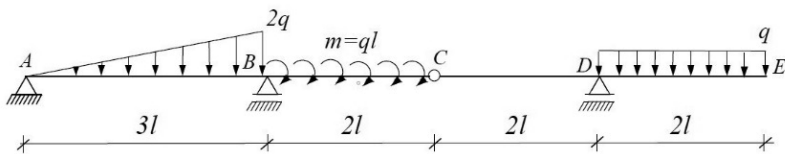


Rys.3.1.17.

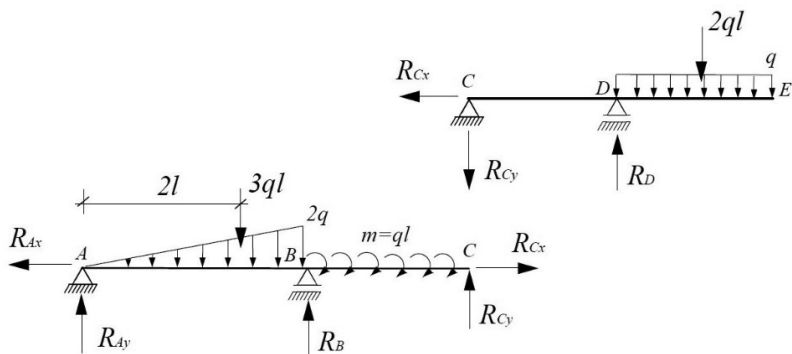


Rys.3.1.18.

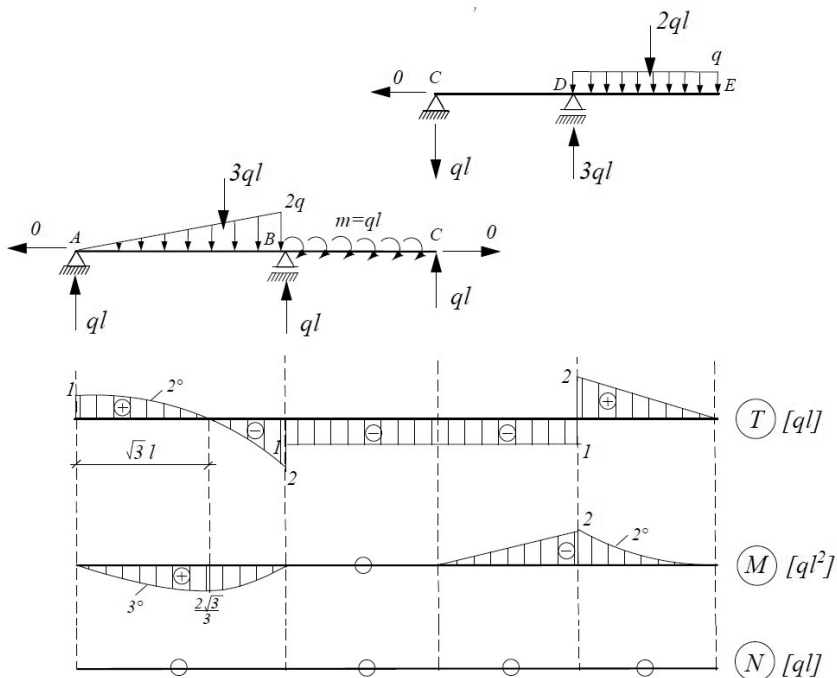
i)



Rys.3.1.19.



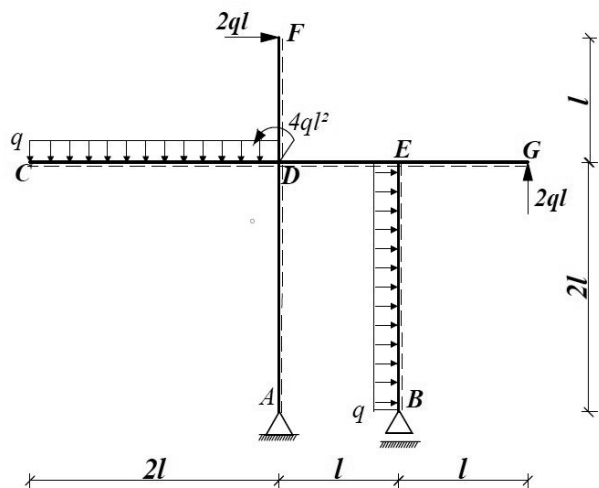
Rys.3.1.20.



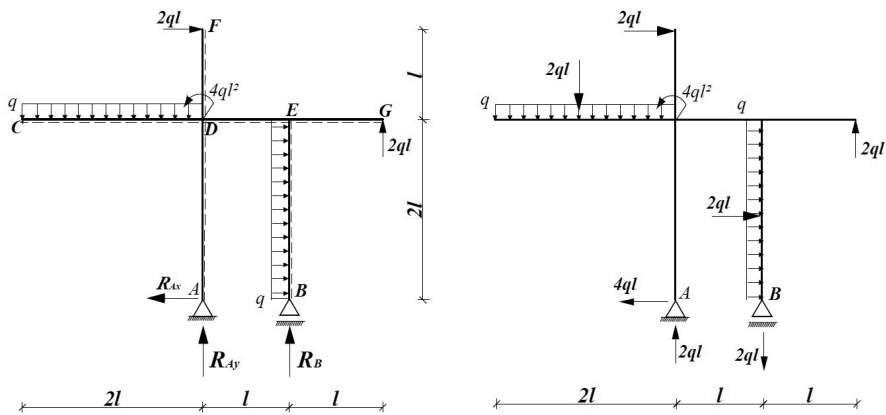
Rys.3.1.21.

3.2. Rozwiązania zadań z rozdziału 2.5.2.

a)

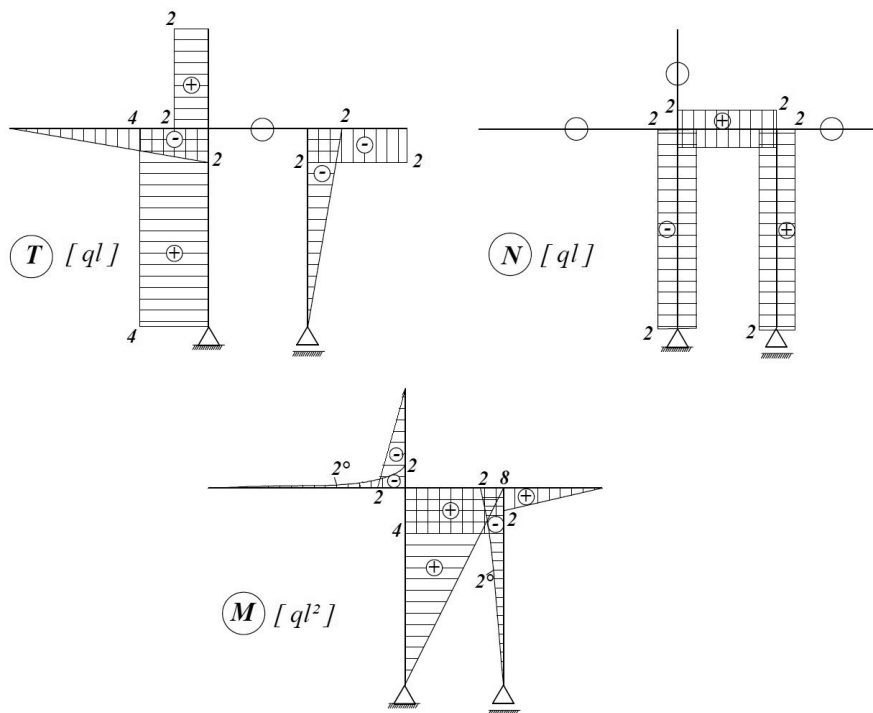


Rys.3.2.1.



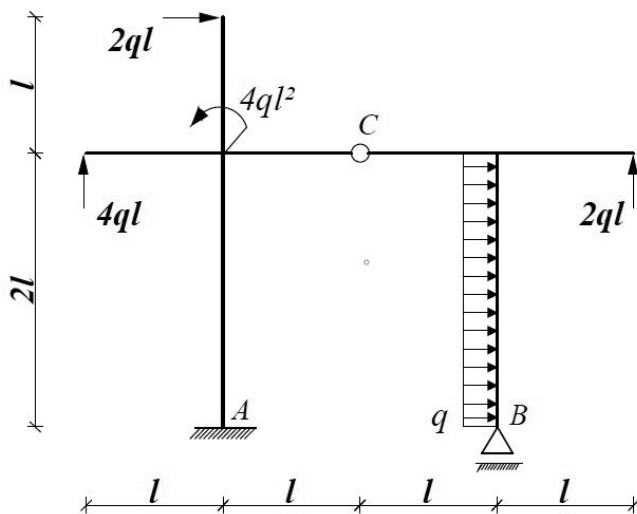
Rys.3.2.2.

Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys. 3.2.3.

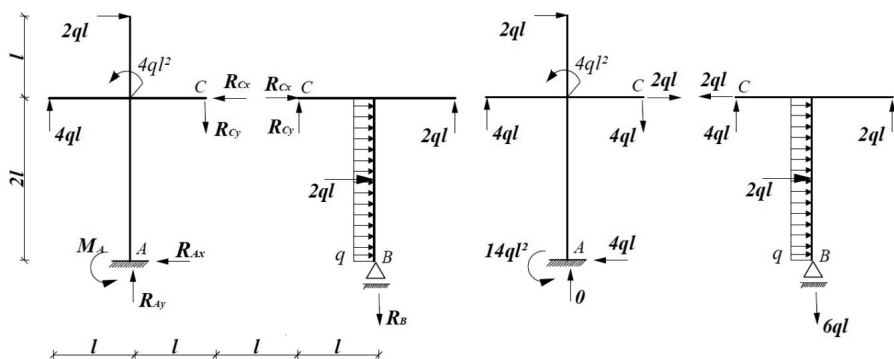


Rys. 3.2.3.

b)

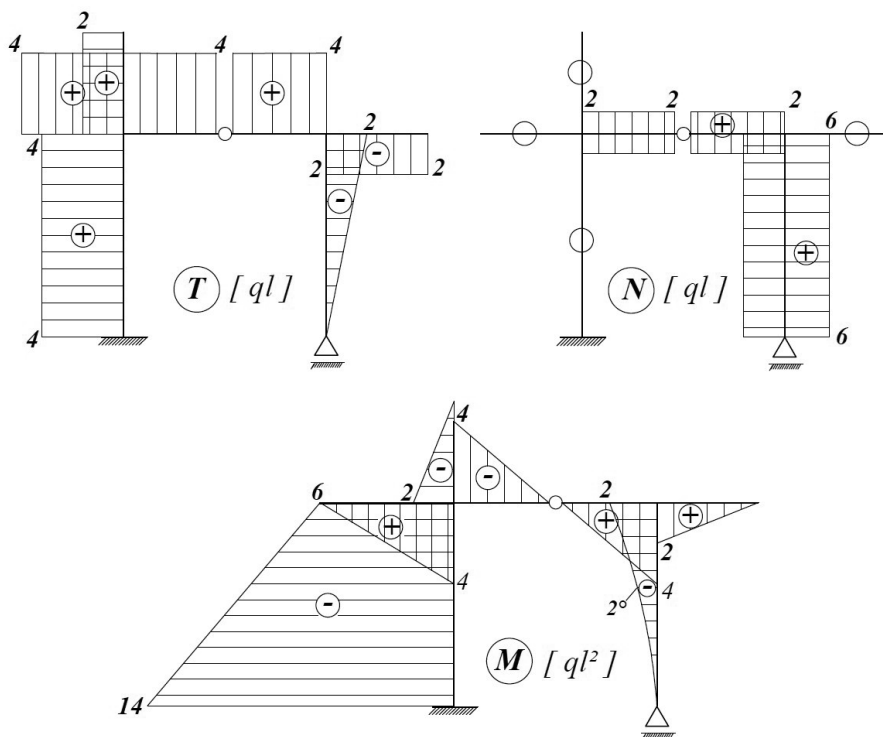


Rys. 3.2.4.



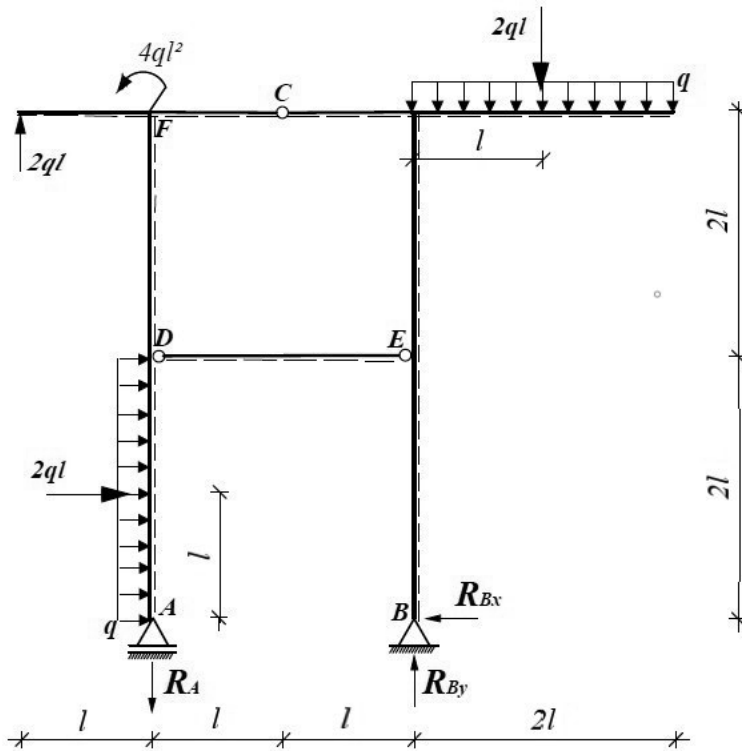
Rys.3.2.5.

Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys. 3.2.6.



Rys. 3.2.6.

c)



Rys. 3.2.7.

1. Stopień statycznej niewyznaczalności $n = r + s - 3t = 3 + 6 - 3 \cdot 3 = 0$

2. Obliczenie reakcji

$$\sum M_{(A)} = 0; \quad R_{By} \cdot 2l - 2ql \cdot l - 2ql \cdot l - 2ql \cdot 3l + 4ql^2 = 0$$

$$R_{By} = 3ql$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{By} + 2ql - 2ql - R_A = 0 \quad R_A = 3ql$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -R_{Bx} + 2ql = 0 \quad R_{Bx} = 2ql$$

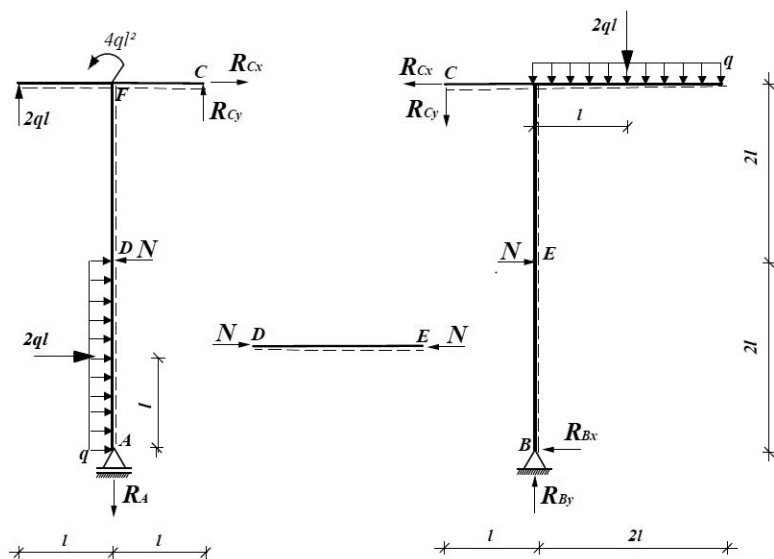
Aby wyznaczyć siły w przegubie C oraz siłę w ściągu DE ramę podzielono na układy przedstawione na Rys. 3.2.8. uwzględniając wzajemne oddziaływanie poszczególnych układów.

- rama prawa:

$$\sum M_{(C)} = 0; \quad R_{By} \cdot l - R_{Bx} \cdot 4l - 2ql \cdot 2l + N \cdot 2l = 0 \quad N = \frac{9}{2}ql$$

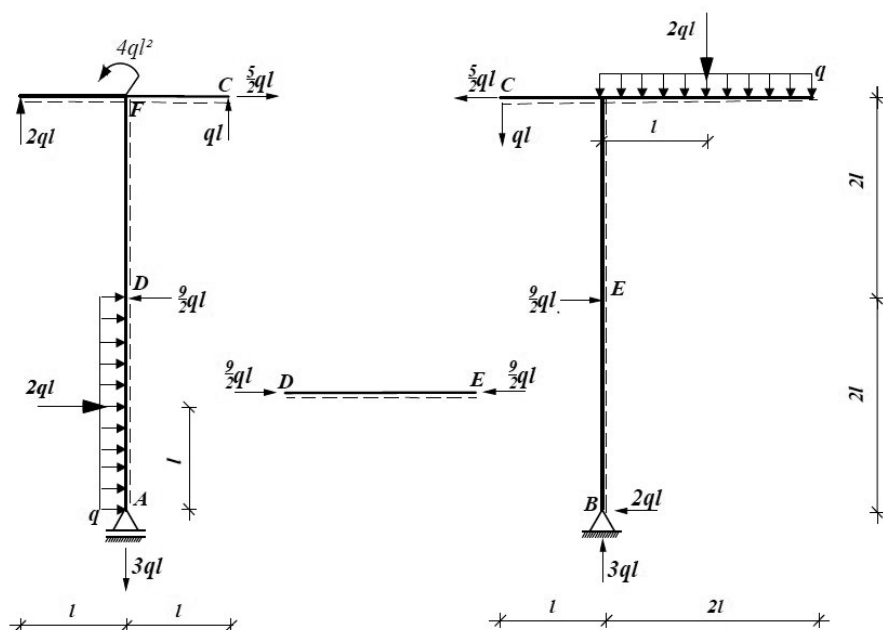
$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{By} - R_{Cy} - 2ql = 0 \quad R_{Cy} = ql$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -R_{Cx} - R_{Bx} + N = 0 \quad R_{Cx} = \frac{5}{2}ql$$



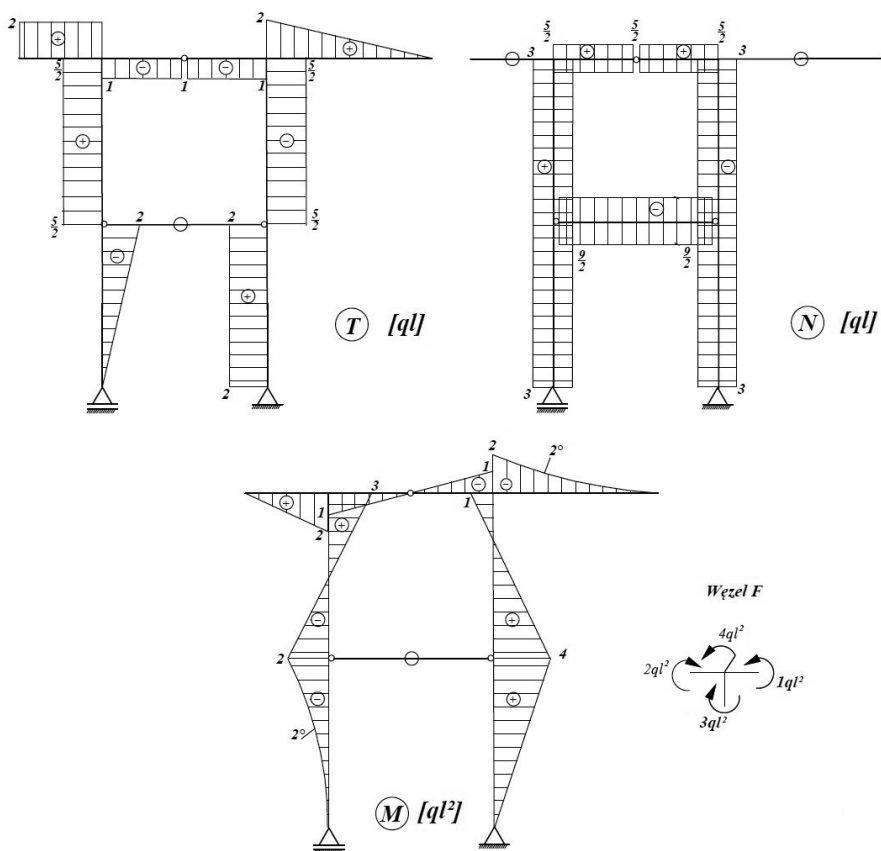
Rys. 3.2.8.

Układ sił czynnych i biernych działających na analizowaną ramę:



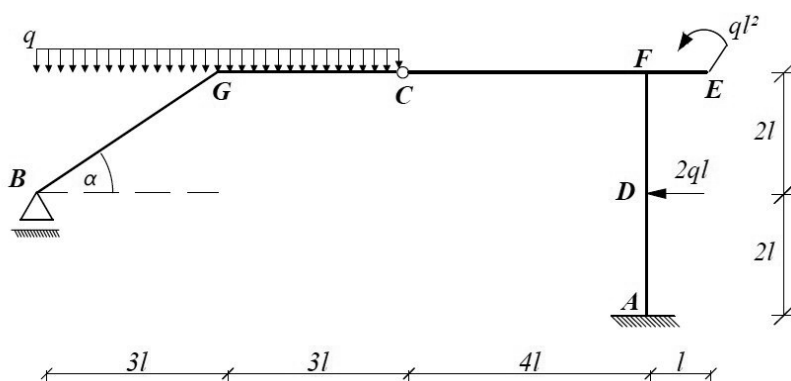
Rys. 3.2.9.

Poprawność analizy potwierdziła równowaga momentów w węźle F. Wykreśły sił wewnętrznych przedstawiono na Rys. 3.2.10.

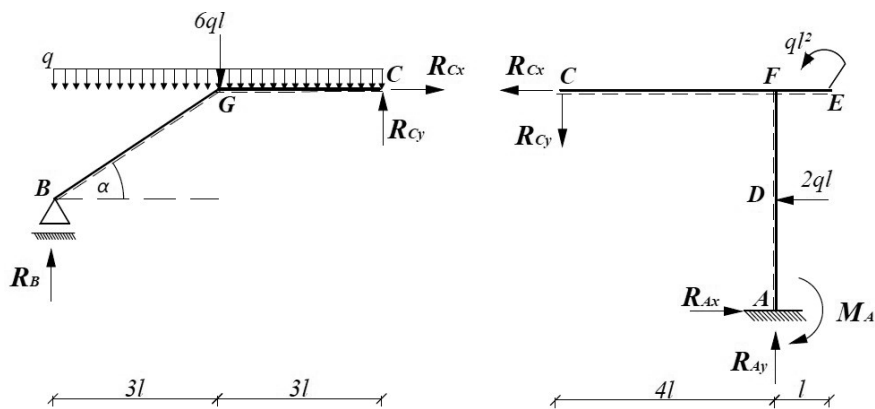


Rys. 3.2.10.

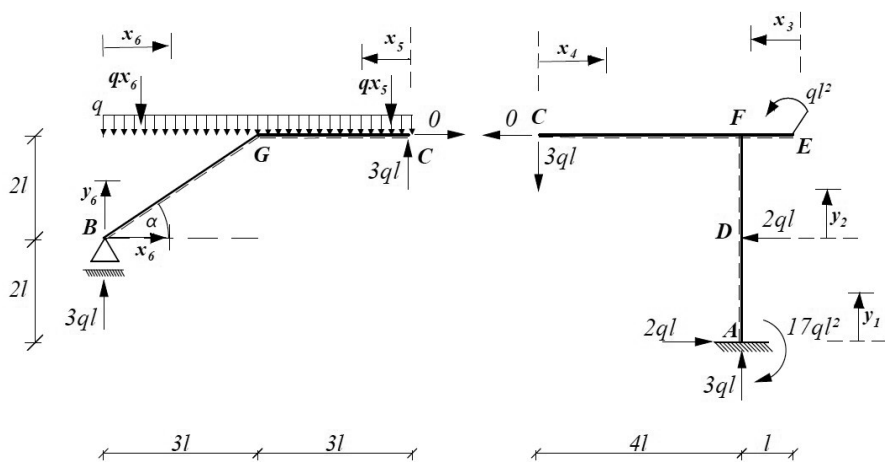
d)



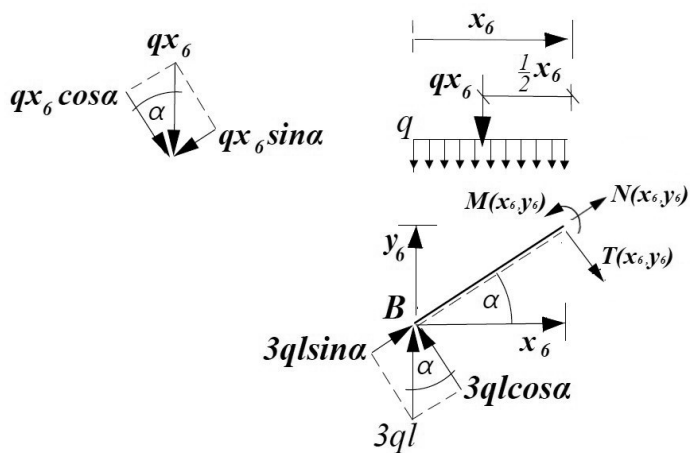
Rys. 3.2.11.



Rys. 3.2.12.

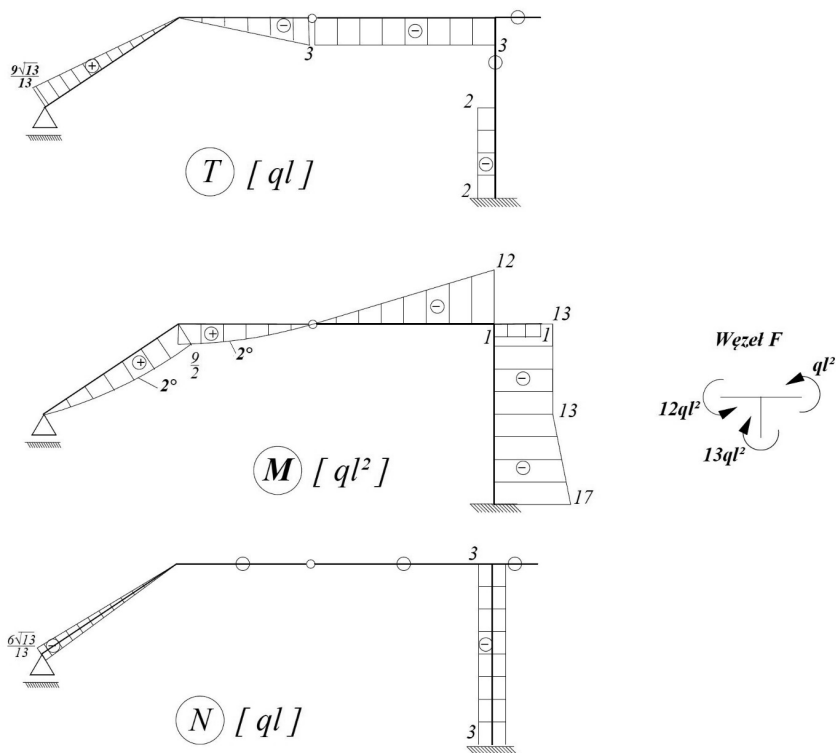


Rys. 3.2.13.



Rys. 3.2.14.

Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na Rys. 3.2.15.



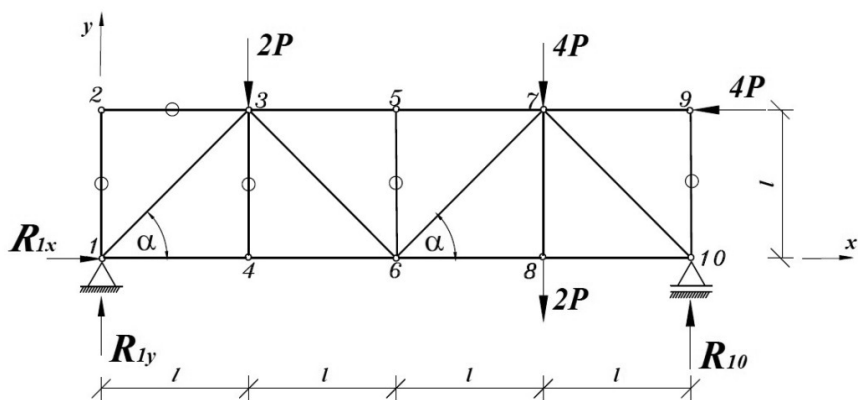
Rys. 3.2.15.

3.3. Rozwiązania zadań z rozdziału 2.6.2.

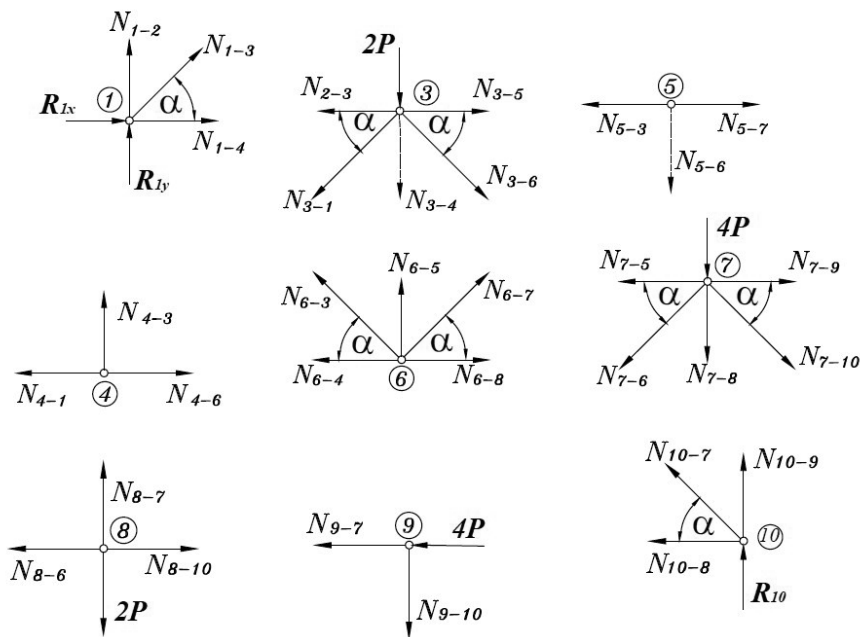
Zadanie 1.

Rozwiązanie:

Stopień statycznej niewyznaczalności rozpatrywanej kratownicy wyznaczmy ze wzoru: $n = r + p - 2w = 3 + 17 - 2 \cdot 10 = 0$



Rys. 3.3.1.



Rys. 3.3.2.

Rekcje podpór (Rys. 3.3.1.) wyznaczmy z ogólnych równań równowagi jak dla płaskiego układu sił.

$$\Sigma M_1 = 0 \rightarrow -2P \cdot l - 2P \cdot 3l - 4P \cdot 3l + R_{10} \cdot 4l + 4P \cdot l = 0 \\ \rightarrow R_{10} = 4P$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 \rightarrow R_{1x} - 4P = 0 \rightarrow R_{1x} = 4P$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 \rightarrow -2P + R_{1y} - 2P - 4P + R_{10} = 0 \rightarrow R_{1y} = 4P$$

Na Rys.3.3.1. zaznaczono wszystkie pręty zerowe.

Wyznaczenie sił w prętach kratownicy (Rys.3.3.2.):

Węzeł 1

$$N_{1-2} = 0$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 \quad N_{1-3} \sin \alpha + R_{1y} + N_{1-2} = 0 \quad \rightarrow N_{1-3} = -4\sqrt{2}P$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 \quad N_{1-3} \cos \alpha + N_{1-4} + R_{1x} = 0 \quad \rightarrow N_{1-4} = 0$$

Węzeł 4

$$N_{4-3} = 0$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 \quad -N_{4-1} + N_{4-6} = 0 \quad \rightarrow N_{4-6} = 0$$

Węzeł 3

$$\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 \quad -N_{3-1} \sin \alpha - 2P - N_{3-6} \sin \alpha - N_{3-4} = 0 \quad \rightarrow N_{3-6} = 2\sqrt{2}P$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 \quad -N_{2-3} - N_{3-1} \cos \alpha + N_{3-5} + N_{3-6} \cos \alpha = 0 \quad \rightarrow N_{3-5} = -6P$$

Węzeł 5

$$N_{5-6} = 0$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 \quad -N_{5-3} + N_{5-7} = 0 \quad \rightarrow N_{5-7} = -6P$$

Węzeł 6

$$\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 \quad N_{6-3}\sin\alpha + N_{6-7}\sin\alpha + N_{6-5} = 0 \rightarrow N_{6-7} = -2\sqrt{2}P$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 \quad -N_{6-4} - N_{6-3}\cos\alpha + N_{6-8} + N_{6-7}\cos\alpha = 0 \rightarrow N_{6-8} = 4P$$

Węzeł 8

$$\Sigma F_{iy} = 0 \quad N_{8-7} - 2P = 0 \rightarrow N_{8-7} = 2P$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 \quad -N_{8-6} + N_{8-10} = 0 \rightarrow N_{8-10} = 4P$$

Węzeł 7

$$\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 \quad -N_{7-6}\sin\alpha - 4P - N_{7-10}\sin\alpha - N_{7-8} = 0$$

$$\rightarrow N_{7-10} = -4\sqrt{2}P$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 \quad -N_{7-5} - N_{7-6}\cos\alpha + N_{7-9} + N_{7-10}\cos\alpha = 0$$

$$\rightarrow N_{7-9} = -4P$$

Sprawdzenie:

Węzeł 9

$$\Sigma F_{ix} = -N_{9-7} - 4P = 4P - 4P = 0$$

$$\Sigma F_{iy} = -N_{9-10} = 0$$

Węzeł 10

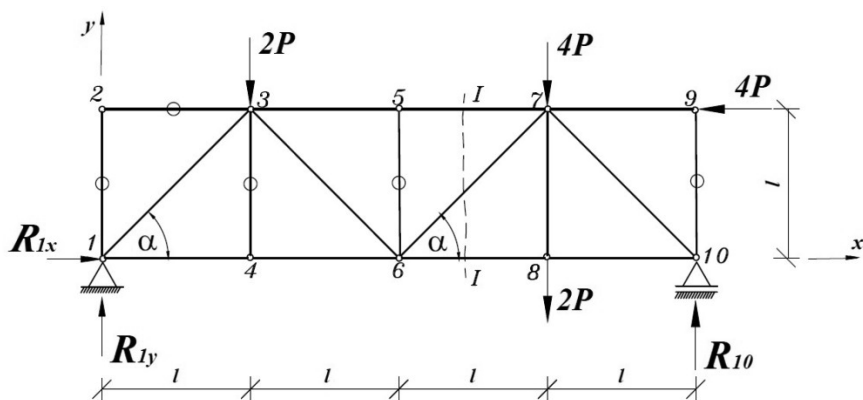
$$\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Sigma F_{ix} = -N_{10-8} - N_{10-7}\cos\alpha = -4P + 4\sqrt{2}P \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Sigma F_{iy} = R_{10} + N_{10-9} + N_{10-7}\sin\alpha = 4P - 4\sqrt{2}P \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Zadanie 2.

Stopień statycznej niewyznaczalności rozpatrywanej kratownicy: $n = r + p - 2w = 3 + 17 - 2 \cdot 10 = 0$



Rys.3.3.3.

Rekcje podpór (Rys. 3.3.3.) wyznaczmy z ogólnych równań równowagi jak dla płaskiego układu sił.

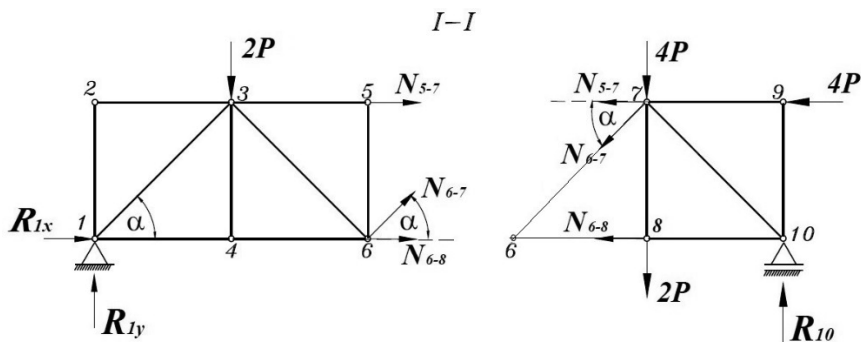
$$\begin{aligned} \Sigma M_1 = 0 &\rightarrow -2P \cdot l - 2P \cdot 3l - 4P \cdot 3l + R_{10} \cdot 4l + 4P \cdot l = 0 \\ &\rightarrow R_{10} = 4P \end{aligned}$$

$$\Sigma F_{ix} = 0 \rightarrow R_{1x} - 4P = 0 \rightarrow R_{1x} = 4P$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 \rightarrow -2P + R_{1y} - 2P - 4P + R_{10} = 0 \rightarrow R_{1y} = 4P$$

Na Rys. 3.3.3. zaznaczono wszystkie pręty zerowe.

W celu wyznaczenia sił w pętach 5-7, 6-7, 6-8 przecięto kratownicę na dwie części przekrojem I-I (Rys.3.3.4.).



Rys.3.3.4.

Równania równowagi dla prawej części kratownicy (Rys. 3.3.4.):

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sum M_7 = 0 \rightarrow -N_{6-8} \cdot l + R_{10} \cdot l = 0 \rightarrow N_{6-8} = 4P$$

$$\sum M_6 = 0 \rightarrow N_{5-7} \cdot l + R_{10} \cdot 2l + 4P \cdot l - 4P \cdot l - 2P \cdot l = 0 \rightarrow$$

$$N_{5-7} = -6P$$

$$\sum F_{iy} = 0 \rightarrow R_{10} - N_{6-7} \cdot \sin\alpha - 4P - 2P = 0 \rightarrow N_{6-7} = -2\sqrt{2}P$$

Literatura

1. Dyląg, Z., Jakubowicz, A., Orłoś, Z. (2012). *Wytrzymałość Materiałów. T.I.* Warszawa: WNT.
2. Dyląg, Z., Krzemińska-Niemiec, E., Filip, F. (1989). *Mechanika budowli T.I* Warszawa: PWN.
3. Hibbeler, R. C. (2016). *Engineering mechanics: statics, Hoboken*. New Jersey: Pearson Education.
4. Jastrzębski, P., Mutermilch, J., Orłowski, W. (1985). *Wytrzymałość materiałów, Cz.I.* Warszawa: Arkady.
5. Misiak, J. (2017). *Mechanika Techniczna Tom 1. 6th ed.* Warszawa: PWN.
6. Reddy, C.S. (2002). *Basic structural analysis*. New Delhi: McGraw-Hill.



ISBN 978-83-64881-91-6