

mgr inż. Władysław Blocki¹

Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania w Rzeszowie

ALGORYTMY GRAFOWE W ERZE SZTUCZNEJ INTELIGENCJI: INTELIGENTNE ROZWIĄZANIA DLA INFORMATYKI

GRAPH ALGORITHMS IN THE ERA OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE: INTELLIGENT SOLUTIONS FOR COMPUTER SCIENCE

Streszczenie

Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie współczesnego znaczenia algorytmów grafowych w kontekście rozwoju sztucznej inteligencji, rozumianej jako dominacja metod uczenia maszynowego i głębokiego opartych na uczeniu reprezentacji (w tym modeli operujących bezpośrednio na strukturach grafowych). Analiza obejmuje zarówno podstawy teoretyczne, jak i nowoczesne techniki uczenia reprezentacji, ze szczególnym uwzględnieniem sieci neuronowych operujących na strukturach grafowych. Wskazano na ograniczenia klasycznych metod analizy grafów, które pomimo swojej fundamentalnej roli okazują się niewystarczające w obliczu współczesnych wymagań wynikających z przetwarzania danych o ogromnej skali i wysokim stopniu złożoności relacyjnej. W dalszej części omówiono zagadnienie skalowalności i złożoności obliczeniowej systemów grafowych, ze szczególnym uwzględnieniem przetwarzania rozproszonego oraz technik redukcji grafów. Przedstawiono również wybrane zastosowania algorytmów grafowych w takich obszarach, jak telekomunikacja, bioinformatyka, analityka sieci wiedzy czy cyberbezpieczeństwo. Ostatnia część poświęcona jest

¹ <https://orcid.org/0009-0000-0006-9479>, e-mail: w.blocki@doktorat.wsiz.edu.pl
Blocki, W. (2026). Algorytmy grafowe w erze sztucznej inteligencji: inteligentne rozwiązania dla informatyki. W: A. Siedlecka, M. Pyra (red.), *AI 360°: innowacje i zastosowania sztucznej inteligencji w gospodarce, społeczeństwie i nauce* (s. 21-43). Biała Podlaska: Akademia Bialska im. Jana Pawła II. https://doi.org/10.29316/9788368103366_2

analizie kierunków dalszego rozwoju, zwłaszcza metod neurosymbolicznych i rozwiązań inspirowanych obliczeniami kwantowymi.

Słowa kluczowe: algorytmy grafowe, sztuczna inteligencja, sieci neuronowe na grafach, uczenie reprezentacji grafowych, grafy wiedzy, skalowalność obliczeń, AI neurosymboliczna, algorytmy kwantowe

Abstract

The aim of this chapter is to present the contemporary role of graph algorithms in the context of the development of artificial intelligence, particularly machine learning and deep learning methods based on representation learning, including models that operate directly on graph structures. The analysis covers both theoretical foundations and modern representation learning techniques, with particular emphasis on Graph Neural Networks (GNNs). The paper highlights the limitations of classical graph analysis methods, which, despite their fundamental importance, prove insufficient in the face of modern requirements arising from the processing of large-scale data and high relational complexity. Issues of scalability and computational complexity in graph-based systems are discussed, with particular attention to distributed processing and graph reduction techniques. Selected applications of graph algorithms are presented in areas such as telecommunications, bioinformatics, knowledge graph analytics, and cybersecurity. The final section discusses future research directions, particularly neuro-symbolic approaches and solutions inspired by quantum computing.

Keywords: graph algorithms, artificial intelligence, graph neural networks, representation learning, knowledge graphs, computational scalability, neuro-symbolic AI, quantum computing algorithms

Wstęp

Współczesne badania nad algorytmami grafowymi opierają się na dwóch filarach. Pierwszym jest historyczne znaczenie grafów jako narzędzia do opisu relacji. Drugim jest technologiczna transformacja wymuszona przez rozwój sztucznej inteligencji (AI). Pierwotnie grafy rozwijano w matematyce dyskretnej jako abstrakcyjne struktury formalne. Obecnie stały się kluczowym modelem reprezentacji informacji w systemach obliczeniowych (Diestel, 2018, s. 1). Zmiana ta wynika z przesunięcia paradygmatu analitycznego, a nie tylko z rosnącej skali danych. Współczesne systemy informatyczne operują coraz częściej na danych, których najistotniejszą właściwością jest relacyjność. Dane

przestają być zbiorem izolowanych rekordów – stają się elementami sieci zależności, których struktura ma znaczenie równie istotne jak wartości atrybutów. Wzrost znaczenia grafów w sztucznej inteligencji wynika z kilku nakładających się procesów. Po pierwsze, wykładniczo rosnąca ilość danych generowanych przez systemy cyfrowe doprowadziła do sytuacji, w której ich interpretacja wymaga rekonstrukcji powiązań między obiektami (Leskovec i in., 2020). Graf stał się naturalną formą reprezentacji tej złożoności – umożliwiającą zarówno przechowywanie, jak i analizę danych o strukturze sieciowej.

Po drugie, rozwój metod uczenia maszynowego – szczególnie uczenia głębokiego – stworzył zapotrzebowanie na modele zdolne do przetwarzania danych o strukturze nieliniowej. Klasyczne reprezentacje tabelaryczne okazują się niewystarczające w sytuacjach, gdy kluczowe znaczenie mają zależności topologiczne. W tej perspektywie graf nie jest jedną z wielu form reprezentacji, lecz rozszerzeniem przestrzeni modelowania, umożliwiającym opis danych, których nie da się adekwatnie przedstawić w strukturach liniowych (Newman, 2018).

Po trzecie, rosnąca interdyscyplinarność badań sprawia, że grafy stają się wspólnym językiem opisu zjawisk w informatyce, biologii, ekonomii, socjologii czy humanistyce cyfrowej. Modele epidemiologiczne, sieci transportowe, systemy finansowe, struktury molekularne, zależności semantyczne w języku naturalnym czy grafy wiedzy łączy potrzeba formalnego ujęcia relacji. Dzięki swojej elastyczności teoretycznej i bogactwu narzędzi analitycznych graf pozostaje jednym z niewielu modeli zdolnych sprostać tej różnorodności (Barabási, 2016).

Równocześnie z rosnącą popularnością grafów pojawiają się nowe wyzwania. Analiza struktur obejmujących miliony lub miliardy wierzchołków wymaga nie tylko optymalizacji algorytmicznej, lecz także nowych paradygmatów obliczeniowych. Problemy skalowalności, efektywności równoległej czy złożoności obliczeniowej pozostają kluczowe (Cormen i in., 2022). Jednocześnie współczesne modele grafowe muszą odpowiadać na pytania dotyczące ekspresywności, stabilności reprezentacji oraz interpretowalności wyników.

Celem niniejszego rozdziału jest syntetyczna analiza ewolucji algorytmów grafowych w trzech wymiarach: klasycznych metod deterministycznych, metod uczenia reprezentacji grafowych (w szczególności sieci neuronowych grafowych) oraz integracji grafów z podejściami neurosymbolicznymi

i obliczeniami kwantowymi. Tezą rozdziału jest stwierdzenie, że graf przekształcił się z narzędzia analizy strukturalnej w centralny model integrujący różne paradygmaty współczesnej sztucznej inteligencji. W kolejnych częściach omówione zostaną podstawy teoretyczne konstrukcji grafów, ich klasyczne zastosowania algorytmiczne oraz współczesne rozszerzenia związane z uczeniem maszynowym i modelowaniem relacyjnym. Rozdział zamyka syntetyczne podsumowanie wskazujące kierunki dalszego rozwoju metod grafowych w kontekście skalowalności, integracji paradygmatów oraz rosnącej złożoności systemów informatycznych.

W opracowaniu dokonano przeglądu literatury z lat 1956-2024, selekcjonując prace na podstawie ich wpływu na rozwój dziedziny (liczby cytowań) oraz innowacyjności w obszarze sieci neuronowych na grafach (GNN) i AI neurosymbolicznej. Taka perspektywa pozwala wskazać kierunek ewolucji od metod deterministycznych ku systemom uczącym się struktur relacyjnych.

W niniejszym rozdziale określenie „w erze sztucznej inteligencji” nie oznacza ogólnej historii AI, lecz etap rozwoju metod *data-driven*, w którym kluczową rolę odgrywają uczenie reprezentacji, uczenie głębokie oraz modele zdolne do przetwarzania danych relacyjnych. W tym ujęciu graf pełni podwójną funkcję: pozostaje formalnym obiektem analizowanym klasycznymi algorytmami deterministycznymi oraz staje się nośnikiem struktury danych w systemach uczących się (embeddingi, GNN, grafy wiedzy), gdzie relacje są istotne równie mocno jak same atrybuty.

Zakres rozdziału obejmuje: podstawy teorii grafów i wybrane klasyczne algorytmy jako fundament, metody uczenia reprezentacji grafowych oraz sieci neuronowe grafowe, zagadnienia skalowalności (w tym przetwarzanie rozproszone i redukcję grafów), przykładowe obszary zastosowań oraz kierunki rozwoju na styku grafów z neurosymboliką i podejściami inspirowanymi obliczeniami kwantowymi. Wątki neurosymboliczne i kwantowe mają charakter przeglądowy (perspektywy i scenariusze zastosowań), bez wchodzenia w pełną formalną teorię i szczegółowe implementacje.

Podstawy teorii grafów

Teoria grafów stanowi jedno z najbardziej wszechstronnych narzędzi matematyki dyskretniej, umożliwiających opis i analizę struktur relacyjnych

o złożonej topologii. Jej znaczenie wykracza daleko poza klasyczny kontekst matematyczny – współcześnie grafy funkcjonują jako podstawowy model reprezentacji w informatyce, bioinformatyce, analizie sieci społecznych, ekonomii czy lingwistyce obliczeniowej. W najbardziej ogólnym ujęciu graf definiuje się jako uporządkowaną parę $G = (V, E)$, gdzie V oznacza zbiór wierzchołków, a E zbiór krawędzi, czyli relacji pomiędzy elementami zbioru V (Newman, 2018, s. 3). Konstrukcja ta, mimo swojej formalnej prostoty, umożliwia modelowanie relacji symetrycznych i asymetrycznych, statycznych i dynamicznych, deterministycznych oraz probabilistycznych.

Współczesne zastosowania wymagają jednak rozszerzenia klasycznej definicji grafu o elementy zwiększające jego ekspresywność. W praktyce analizuje się grafy ważne, w których każdej krawędzi przypisuje się wartość numeryczną reprezentującą koszt, siłę lub prawdopodobieństwo relacji, grafy atrybutowane, gdzie wierzchołki i krawędzie posiadają zestawy cech semantycznych, grafy skierowane, umożliwiające modelowanie zależności przyczynowych, a także grafy heterogeniczne obejmujące wiele typów wierzchołków i relacji. Rozszerzenia te doprowadziły do powstania złożonych struktur, takich jak grafy wielowarstwowe, grafy molekularne czy grafy wiedzy, które odgrywają kluczową rolę w analizie danych wielkoskalowych (Leskovec i in., 2020).

Istotnym aspektem teorii grafów jest jej aparatura strukturalna, umożliwiająca systematyczną analizę własności topologicznych. Do podstawowych pojęć należą stopień wierzchołka, ścieżka, cykl, spójność, odległość oraz centralność. Każde z nich opisuje odmienny wymiar relacyjnej natury danych: centralność pozwala mierzyć znaczenie elementu w strukturze grafu, odległość określa efektywność komunikacji, natomiast spójność wskazuje odporność sieci na zakłócenia. Formalizacja tych pojęć umożliwiła rozwój klasycznych algorytmów analizy grafów, obejmujących wyznaczanie najkrótszych ścieżek, minimalnych drzew rozpinających oraz przepływów sieciowych (Cormen i in., 2022). Algorytmy te stanowią fundament współczesnych metod przetwarzania danych relacyjnych. Szczególne znaczenie ma ujęcie macierzowe i spektralne grafów, które pozwala przejść od struktur dyskretnych do reprezentacji algebraicznych. Macierz sąsiedztwa oraz macierz Laplasjanu stanowią podstawę analizy spektralnej, umożliwiając badanie stabilności, procesów dyfuzji oraz własności klasteryzacyjnych przy użyciu narzędzi algebry liniowej (Chung, 1997). Ujęcie to stało się jednym z fundamentów nowoczesnych metod

obliczeniowych w uczeniu maszynowym, w szczególności grafowych operacji konwolucyjnych.

Podsumowując, teoria grafów nie stanowi jedynie formalnego punktu wyjścia dla analizy struktur relacyjnych. Jest ona równocześnie podstawą metod wykorzystywanych we współczesnych systemach obliczeniowych, w których kluczowe znaczenie ma modelowanie złożonych, nieliniowych zależności między obiektami.

Klasyczne algorytmy grafowe i ich ograniczenia

Klasyczne algorytmy grafowe stanowią fundament rozwoju współczesnej informatyki, dostarczając podstawowych mechanizmów analizy i przetwarzania struktur relacyjnych. Choć wiele z nich powstało w drugiej połowie XX wieku, ich koncepcje pozostają aktualne, a część z nich stała się punktem wyjścia dla późniejszych metod wykorzystywanych w uczeniu maszynowym, analizie sieci oraz grafowych przekształceniach liniowych. W niniejszym rozdziale przedstawiono syntetyczną charakterystykę najważniejszych klas klasycznych algorytmów grafowych oraz ich znaczenie dla współczesnych zastosowań. Tradycyjnie w centrum analiz grafowych znajdują się algorytmy przeszukiwania grafu, przede wszystkim przeszukiwanie w głąb (ang. *depth-first search* – DFS) oraz przeszukiwanie wszerz (ang. *breadth-first search* – BFS). Oba należą do najbardziej elementarnych procedur operujących na grafach i stanowią podstawę wielu bardziej zaawansowanych metod, takich jak wykrywanie cykli, sortowanie topologiczne, wyznaczanie komponentów spójności czy analiza własności strukturalnych grafów skierowanych (Cormen i in., 2022). Ich istotną cechą jest deterministyczny charakter oraz liniowa złożoność względem liczby wierzchołków i krawędzi, co czyni je wyjątkowo efektywnymi w grafach średniej skali. W sensie koncepcyjnym BFS i DFS stworzyły ramy obliczeniowe, które stały się podstawą dalszego rozwoju metod grafowych.

Drugą fundamentalną kategorię stanowią algorytmy wyznaczania najkrótszych ścieżek. Najbardziej klasycznym z nich jest algorytm Dijkstry, umożliwiający wyznaczenie optymalnych ścieżek w grafach o nieujemnych wagach. Jego konstrukcja opiera się na iteracyjnej relaksacji odległości i sukcesywnym rozszerzaniu zbioru wierzchołków o ustalonej minimalnej odległości (Dijkstra, 1959, s. 269). Algorytm ten stał się podstawą współczesnych systemów

routingu, optymalizacji komunikacji oraz analiz przestrzennych. W sytuacjach, w których dopuszczalne są wagi ujemne, stosuje się algorytm Bellmana-Forda, który charakteryzuje się większą złożonością obliczeniową, lecz gwarantuje poprawność w szerszej klasie problemów (Bellman, 1958, s. 87). Równie istotną rolę odgrywają algorytmy minimalnego drzewa rozpinającego (ang. *minimum spanning tree* – MST). Algorytmy Kruskala oraz Prima umożliwiają wyznaczenie podzbioru krawędzi minimalizującego sumaryczny koszt połączeń przy zachowaniu spójności grafu (Kruskal, 1956). Metody te znalazły zastosowanie w projektowaniu infrastruktury, kompresji danych, klasteryzacji oraz analizie sieci fizycznych i logicznych. Ich znaczenie wykracza poza zastosowania praktyczne – koncepcja zachłannej optymalizacji grafowej stała się inspiracją dla wielu późniejszych metod heurystycznych. Odrębną klasę stanowią algorytmy przepływu w sieciach, takie jak metoda Forda-Fulkersona oraz jej wariant Edmonds-Karp. Celem tych algorytmów jest wyznaczenie maksymalnego przepływu pomiędzy dwoma wyróżnionymi wierzchołkami grafu przy uwzględnieniu ograniczeń przepustowości krawędzi (Ford, Fulkerson, 1962). Metody przepływowe znalazły zastosowanie w logistyce, analizie sieci transportowych, przydziale zasobów oraz w problemach wyznaczania minimalnego przekroju. Choć ich złożoność przewyższa złożoność algorytmów przeszukiwania czy MST, ich znaczenie praktyczne jest fundamentalne, ponieważ modelują procesy przepływu energii, informacji i zasobów w systemach rzeczywistych. Klasyczne algorytmy grafowe wykazują jednak ograniczenia, które ujawniają się w kontekście współczesnych, wielkoskalowych i dynamicznych sieci. Większość z nich zakłada pełną dostępność struktury grafu w pamięci operacyjnej, co staje się problematyczne w przypadku struktur obejmujących miliardy wierzchołków. Ponadto projektowane były z myślą o grafach statycznych, podczas gdy współczesne sieci – społeczne, informacyjne czy biologiczne – cechują się dynamiczną zmiennością relacji w czasie (Leskovec i in., 2020). Dodatkowo metody te nie operują bezpośrednio na danych atrybutowych, co ogranicza ich zastosowanie w analizach wymagających integracji informacji semantycznych.

Mimo tych ograniczeń klasyczne algorytmy grafowe pozostają niezbędnym punktem odniesienia dla współczesnych metod obliczeniowych. Stanowią one teoretyczne zaplecze dla wielu nowoczesnych algorytmów grafowych, zarówno deterministycznych, jak i probabilistycznych, a także dostarczają

formalnego języka opisu problemów grafowych, umożliwiającego porównywanie efektywności metod klasycznych i współczesnych.

Integracja algorytmów grafowych z uczeniem maszynowym

Integracja algorytmów grafowych z metodami uczenia maszynowego stała się jednym z kluczowych kierunków rozwoju współczesnej sztucznej inteligencji. Wzrost znaczenia danych relacyjnych, obejmujących zarówno struktury społeczne, molekularne, jak i językowe, ujawnił ograniczenia klasycznych modeli, które nie były zdolne do uchwycenia zależności topologicznych pomiędzy obiektami (Bronstein i in., 2017). Wprowadzenie uczenia grafowego umożliwiło przetwarzanie informacji w sposób zgodny z relacyjną naturą danych, w których semantyka wynika nie tylko z cech jednostkowych, lecz z konfiguracji powiązań między elementami struktury.

Centralnym mechanizmem współczesnych metod uczenia na grafach jest koncepcja propagacji wiadomości (*message passing*), rozumiana jako iteracyjny proces aktualizacji reprezentacji wierzchołków na podstawie informacji agregowanych od ich sąsiadów. Formalizacja tego podejścia w postaci *Message Passing Neural Networks* (MPNN) pozwoliła na systematyczne połączenie narzędzi analizy grafowej z elastycznością modeli głębokiego uczenia (Gilmer i in., 2017, s. 1274). Kluczową własnością tych modeli jest niezmienniczość względem permutacji sąsiedztwa, zapewniająca poprawność semantyczną operacji agregacji.

Rozwój metod konwolucyjnych na grafach znacząco poszerzył zakres zastosowań uczenia grafowego. *Graph Convolutional Networks* (GCN), zaproponowane przez Kipfa i Wellinga, uogólniły operację splotu na struktury nieregularne poprzez wykorzystanie znormalizowanej macierzy sąsiedztwa i transformacji liniowych (Kipf, Welling, 2017, s. 3). Umożliwiło to efektywne łączenie informacji o cechach wierzchołków z lokalną strukturą grafu. Jednocześnie wykazano, że wraz ze wzrostem liczby warstw GCN dochodzi do zjawiska nadmiernego wygładzania reprezentacji (*oversmoothing*), prowadzącego do utraty zdolności rozróżniania odległych wierzchołków.

W odpowiedzi na te ograniczenia rozwinięto modele uwagowe, takie jak *Graph Attention Networks* (GAT), w których zastosowanie mechanizmu uwagi pozwala dynamicznie różnicować wpływ poszczególnych sąsiadów (Veličković

i in., 2018, s. 5). Mechanizm ten zwiększa elastyczność reprezentacyjną modelu, umożliwiając kontekstową interpretację relacji. Modele uwagowe okazały się szczególnie skuteczne w grafach o heterogenicznej semantyce relacji, w tym w analizie struktur biologicznych, lingwistycznych i społecznych. Odpowiedzią na ograniczenia klasycznych GNN, w tym problem oversmoothingu oraz trudności w chwytaniu globalnych zależności, stał się w ostatnich latach (2022-2024) rozwój transformatorów grafowych (*graph transformers*), m.in. w podejściach GraphGPS oraz TokenGT (Rampásek i in., 2022; Kim i in., 2022). Modele te adaptują mechanizm samo-uwagi (*self-attention*) znany z przetwarzania języka naturalnego do struktur grafowych, umożliwiając efektywniejsze modelowanie relacji długodystansowych w sieci bez sztywnego ograniczania się do lokalnego sąsiedztwa.

Wraz z rozwojem architektur rośnie znaczenie zagadnień etyczno-prawnych w uczeniu grafowym. Złożone modele predykcyjne są podatne na zjawisko uprzedzeń algorytmicznych (*bias*). Jeżeli historyczne dane grafowe (np. sieci społecznych czy finansowych) zawierają ukryte nierówności lub błędy, modele oparte na propagacji informacji mogą je powielać, a wręcz wzmacniać. Wymusza to rozwój technik audytu grafów oraz metod uczenia sprawiedliwego (*fairness-aware graph learning*), co staje się kluczowe z punktu widzenia interpretowalności systemów AI oraz zgodności z nowymi regulacjami prawnymi.

Równolegle rozwijano podejścia indukcyjne, umożliwiające trenowanie modeli na fragmentach dużych struktur bez konieczności przetwarzania całego grafu. Architektura GraphSAGE wprowadziła koncepcję próbkowania sąsiedztwa oraz agregacji informacji na ograniczonych podgrafach, co pozwoliło skalować uczenie grafowe do struktur obejmujących miliony i miliardy wierzchołków (Hamilton i in., 2017, s. 1025). Istotną zaletą podejścia indukcyjnego jest możliwość generowania reprezentacji dla nowych, wcześniej nieobserwowanych wierzchołków, co ma kluczowe znaczenie w środowiskach dynamicznych.

Pomimo znaczących osiągnięć współczesne modele grafowe pozostają obarczone ograniczeniami teoretycznymi i obliczeniowymi. Ich ekspresywność jest ściśle powiązana z mocą testu Weisfeilera-Lehmana, co oznacza, że wiele architektur opartych na propagacji informacji nie jest w stanie odróżnić pewnych klas grafów nierozróżnialnych względem tego testu (Xu i in., 2019). Ograniczenie to wskazuje na fundamentalne bariery reprezentacyjne modeli

GNN. Dodatkowo duże grafy generują istotne obciążenie pamięciowe i obliczeniowe, co wymusza stosowanie strategii przybliżonych, technik próbkowania oraz metod hybrydowych. Modele grafowe są również wrażliwe na lokalne zmiany topologii, co może prowadzić do niestabilności reprezentacji i pogorszenia uogólniania.

Integracja algorytmów grafowych z metodami uczenia maszynowego stanowi obecnie podstawę wielu zastosowań, obejmujących bioinformatykę, chemoinformatykę, przetwarzanie języka naturalnego, analizę grafów wiedzy oraz wykrywanie anomalii w systemach komunikacyjnych. Wraz z rozwojem modeli neurosymbolicznych, metod probabilistycznych oraz architektur hybrydowych znaczenie uczenia grafowego będzie prawdopodobnie rosło, a graf pozostanie jednym z kluczowych modeli integrujących różne paradygmaty współczesnej sztucznej inteligencji.

Skalowalność i złożoność obliczeniowa w grafowych systemach dużej skali

Skalowalność algorytmów grafowych stała się jednym z kluczowych wyzwań współczesnej informatyki, ponieważ rzeczywiste grafy osiągają rozmiary, które jeszcze dwie dekady temu były niewyobrażalne. W systemach telekomunikacyjnych, mediach społecznościowych, analizach finansowych czy medycynie obliczeniowej liczba wierzchołków i krawędzi rośnie w tempie wykładniczym, co powoduje, że tradycyjne podejścia algorytmiczne, projektowane z myślą o strukturach mieszczących się w pamięci pojedynczej maszyny, stają się niewystarczające (Leskovec i in., 2020). Współczesne badania koncentrują się zatem nie tylko na analizie tych struktur, lecz także na opracowywaniu metod umożliwiających ich dynamiczne utrzymanie i przetwarzanie w warunkach ograniczonych zasobów obliczeniowych.

Istotnym czynnikiem utrudniającym skalowanie jest topologia grafów rzeczywistych, które często wykazują własności sieci bezskalowych. W takich strukturach niewielka liczba węzłów posiada bardzo wysoki stopień, podczas gdy większość pozostaje słabo połączona. Nierównomierna dystrybucja stopni prowadzi do znacznego zróżnicowania obciążeń obliczeniowych w systemach rozproszonych. Obecność wysoce połączonych wierzchołków zwiększa koszty komunikacji między węzłami obliczeniowymi oraz utrudnia równomierne partycjonowanie grafu (Newman, 2018). W praktyce oznacza to, że nawet

w dużych klastrach obliczeniowych wąskie gardła komunikacyjne mogą ograniczać efektywność przetwarzania.

Odpowiedzią na te wyzwania było rozwinięcie architektur przetwarzania rozproszonego, wśród których istotne miejsce zajmuje model *Bulk Synchronous Parallel* (BSP), zaimplementowany m.in. w systemie Pregel (Malewicz i in., 2010). W modelu tym graf dzielony jest na partycje przetwarzane równolegle, a komunikacja pomiędzy nimi odbywa się w zsynchronizowanych fazach obliczeń. Podejście to umożliwia skalowanie do miliardów węzłów, jednak koszty synchronizacji i komunikacji między partycjami stają się dominującym czynnikiem przy dalszym zwiększaniu skali.

Równolegle rozwijano metody akceleracji sprzętowej, zwłaszcza z wykorzystaniem procesorów graficznych (GPU) oraz wyspecjalizowanych jednostek obliczeniowych. GPU pozwalają na efektywne wykonywanie operacji na macierzach rzadkich, które stanowią podstawę wielu algorytmów grafowych, w tym analiz spektralnych oraz modeli głębokiego uczenia. Efektywne wykorzystanie akceleratorów wymaga jednak stosowania technik redukcji grafu, takich jak próbkowanie sąsiedztwa czy kompresja struktury (Chen i in., 2018, s. 4). Redukcje te zmniejszają koszty obliczeń, lecz mogą prowadzić do utraty części informacji topologicznej, co wymaga kompromisu między efektywnością a dokładnością.

Ważną grupę metod wspierających skalowalność stanowią techniki przybliżone, umożliwiające analizę grafów bez przetwarzania wszystkich krawędzi. Jednym z podejść jest *sparsification*, polegające na redukcji liczby krawędzi przy zachowaniu kluczowych własności spektralnych grafu. Wykazano, że nawet znacząca redukcja struktury może zachować własności istotne dla analizy przepływów czy klasteryzacji (Spielman, Srivastava, 2011). Innym podejściem jest *coarsening*, w którym grupy wierzchołków agregowane są w superwęzły, tworząc hierarchiczną reprezentację grafu. Techniki te stanowią fundament współczesnych metod wieloskalowych, w tym architektur grafowych sieci neuronowych.

W kontekście sztucznej inteligencji rośnie również znaczenie problemu stabilności reprezentacji grafowych w systemach dużej skali. Niewielkie zmiany topologiczne – takie jak dodanie krawędzi czy modyfikacja wag – mogą prowadzić do istotnych zmian w reprezentacjach generowanych przez modele uczące się. Zjawisko to wynika zarówno z własności spektralnych grafów, jak

i z dynamiki propagacji informacji w architekturach głębokiego uczenia. Analizy wskazują, że stabilność modeli grafowych jest ściśle powiązana z ich podstawą spektralną, co wyznacza kierunek dalszych badań teoretycznych i praktycznych (Gama i in., 2020).

Podsumowując, problem skalowalności algorytmów grafowych nie ogranicza się do kwestii czysto technicznych. Stanowi on jedno z centralnych wyzwań w projektowaniu infrastruktury obliczeniowej współczesnej sztucznej inteligencji. Efektywne przetwarzanie grafów o rozmiarach globalnych wymaga synergii metod teoretycznych, architektur rozproszonych, akceleracji sprzętowej oraz technik probabilistycznych i hierarchicznych. Kluczowe staje się znalezienie równowagi pomiędzy dokładnością analizy a kosztami obliczeniowymi, co bezpośrednio wpływa na praktyczną użyteczność modeli grafowych w systemach rzeczywistych.

Grafowe modele uczenia reprezentacji: perspektywa teoretyczna i geometryczna

Uczenie reprezentacji grafowych stało się jednym z najbardziej dynamicznie rozwijających się obszarów współczesnej sztucznej inteligencji. W przeciwieństwie do klasycznych metod algorytmicznych, operujących bezpośrednio na strukturze grafu, podejście to zakłada możliwość odwzorowania relacji grafowych w przestrzeni numerycznej, w której cechy strukturalne sieci przejawiają się jako wzorce geometryczne. Reprezentacja taka, określana mianem przestrzeni latentnej, stanowi podstawę dalszych operacji klasyfikacyjnych, predykcyjnych i generatywnych (Hamilton, 2020, s. 11). Kluczowa idea uczenia reprezentacji grafowych polega na identyfikowaniu wzorców zależności, które mogą być trudne do uchwycenia w przestrzeni oryginalnej struktury, lecz ujawniają się po transformacji do przestrzeni wektorowej. W ujęciu geometrycznym graf można traktować jako obiekt o własnej strukturze topologicznej, w którym relacje między wierzchołkami determinują lokalną geometrię przestrzeni reprezentacyjnej (Bronstein i in., 2021). Takie podejście umożliwia wykorzystanie narzędzi analizy geometrycznej oraz spektralnej do konstrukcji modeli zdolnych do uchwycenia złożonych relacji. Istotnym zagadnieniem pozostaje dobór przestrzeni latentnej. Przestrzenie euklidesowe, choć intuicyjne

i szeroko stosowane, nie zawsze oddają hierarchiczną naturę wielu grafów, takich jak grafy wiedzy czy sieci semantyczne. W takich przypadkach adekwatniejsze okazują się przestrzenie hiperboliczne, których ujemna krzywizna umożliwia kompaktowe modelowanie struktur drzewiastych i hierarchicznych. Wykazano, że osadzanie w przestrzeni hiperbolicznej pozwala na reprezentowanie relacji hierarchicznych przy niższym wymiarze i mniejszym błędzie rekonstrukcji niż w przestrzeniach euklidesowych (Nickel, Kiela, 2017, s. 6352).

Równolegle rozwijane są modele probabilistyczne, w których struktura grafu traktowana jest jako realizacja procesu losowego. W takim ujęciu reprezentacje uwzględniają niepewność topologii oraz zmienność relacji. Modele probabilistyczne odgrywają szczególną rolę w zastosowaniach obejmujących dane niepełne lub szumne, takich jak bioinformatyka czy analiza sieci epidemiologicznych. Integracja informacji strukturalnej z niepewnością probabilistyczną umożliwia budowę modeli bardziej odpornych na zakłócenia (Koller, Friedman, 2009).

W ostatnich latach rozwój reprezentacji grafowych objął również modele operujące na poziomie całych grafów, a nie wyłącznie pojedynczych węzłów. Techniki te wykorzystują hierarchiczne mechanizmy agregacji, które stopniowo kompresują strukturę grafu, tworząc jego reprezentację globalną. Hierarchiczne modelowanie pozwala zachować wieloskalowy charakter danych, od lokalnych motywów po globalne zależności strukturalne (Ying i in., 2018, s. 4802). Podejście to znajduje zastosowanie m.in. w chemoinformatyce oraz analizie układów biologicznych. Coraz większego znaczenia nabiera także integracja uczenia reprezentacji grafowych z podejściami neurosymbolicznymi. Łączenie modeli statystycznych z formalnymi ograniczeniami logicznymi umożliwia budowę systemów, w których graf pełni rolę struktury wiedzy podlegającej zarówno uczeniu, jak i dedukcji. Wskazuje się, że takie połączenie może prowadzić do powstania systemów sztucznej inteligencji zdolnych do integracji wnioskowania symbolicznego z reprezentacją ciągłą (Bianchi i in., 2020, s. 57).

Uczenie reprezentacji grafowych istotnie przekształciło sposób interpretacji danych relacyjnych. Przejście od analizy czysto topologicznej do ujęć geometrycznych, probabilistycznych i hierarchicznych sprawiło, że graf stał się nie tylko narzędziem opisu, lecz również mechanizmem transformacji wiedzy. Reprezentacje grafowe umożliwiają budowę modeli bardziej elastycznych,

skalowalnych i semantycznie świadomych, wyznaczając kierunek dalszego rozwoju badań nad sztuczną inteligencją opartą na strukturach relacyjnych. W celu syntetycznego uporządkowania przedstawionych klas metod grafowych oraz ich ewolucji w kontekście sztucznej inteligencji zestawiono je w Tabeli 1.

Tabela 1. Klasy metod grafowych i ich ewolucja w sztucznej inteligencji

Etap rozwoju	Klasa metod	Charakter obliczeń	Reprezentacja danych	Typowe zastosowania
I. Klasyczny	Algorytmy deterministyczne (BFS, DFS, Dijkstra, MST, Max-Flow)	Kombinatoryczne, deterministyczne	Struktura topologiczna grafu	Routing, optymalizacja, analiza sieci
II. Reprezentacyjny	Uczenie grafowe (GCN, GAT, GraphSAGE, MPNN)	Statystyczne, uczenie głębokie	Przestrzeń latentna (wektorowa)	Predykcja węzłów, klasyfikacja, chemoinformatyka
III. Geometryczny	Osadzania hiperboliczne, spektralne	Geometryczne, algebraiczne	Przestrzenie nieeuklidesowe	Modelowanie hierarchii, grafy wiedzy
IV. Hybrydowy	Modele neurosymboliczne, probabilistyczne, kwantowe	Symboliczne + statystyczne + nieklasyczne	Struktura wiedzy + reprezentacja ciągła	Systemy wiedzy, AI interpretowalna, modele przyszłościowe

Źródło: opracowanie własne.

Reprezentacje grafowe przenoszą relacje do przestrzeni latentnych, gdzie łatwiej budować modele predykcyjne, a dobór geometrii (euklidesowej vs. nieeuklidesowej) wpływa na zdolność odwzorowania hierarchii i struktury. Tak przygotowany aparat pojęciowy tłumaczy, dlaczego metody grafowe tak dobrze transferują się do zastosowań domenowych.

Zastosowania algorytmów grafowych we współczesnej informatyce i nauce o danych

Algorytmy grafowe zajmują centralne miejsce we współczesnej informatyce ze względu na zdolność modelowania złożonych zależności charakterystycznych dla dzisiejszych systemów technologicznych i naukowych. Wraz z rozwojem infrastruktury cyfrowej, eksplozją danych oraz intensyfikacją badań nad systemami inteligentnymi grafy stały się podstawowym narzędziem

opisu procesów, których nie sposób adekwatnie ująć w modelach sekwencyjnych lub tabelarycznych. Ich zastosowania wykraczają daleko poza klasyczne sieci komunikacyjne i obejmują dziedziny, w których struktura relacji stanowi kluczowy wymiar informacji.

W obszarze przetwarzania języka naturalnego grafy umożliwiły przejście od analizy liniowej do analizy strukturalnej. Reprezentacje grafowe pozwalają modelować zależności składniowe, semantyczne oraz dyskursywne, ujmując tekst jako strukturę powiązań pomiędzy jednostkami językowymi. Wykazano, że takie podejście umożliwia dokładniejsze odwzorowanie kontekstu oraz relacji logicznych w tekście (Manning, Schütze, 1999). Grafowe modele zależności znajdują zastosowanie zarówno w systemach ekstrakcji informacji, jak i w analizie wiedzy reprezentowanej w formie grafów semantycznych. Systemy rekomendacyjne należą również do ważnych obszarów zastosowań algorytmów grafowych. W tym kontekście grafy modelują relacje pomiędzy użytkownikami, produktami oraz historią interakcji, a sieci neuronowe na grafach wspierają personalizację i predykcję preferencji użytkowników (Wu i in., 2022).

Równie istotne zastosowania tych metod występują w medycynie oraz biologii obliczeniowej. Struktury grafowe stanowią naturalny model interakcji molekularnych, sieci regulacyjnych oraz procesów metabolicznych. Wykazano, że organizmy żywe funkcjonują jako systemy sieciowe, w których zaburzenia chorobowe mogą być interpretowane jako zmiany w topologii grafu, a nie wyłącznie jako defekty pojedynczych elementów (Barabási, 2016). Tego rodzaju podejście umożliwia identyfikację kluczowych węzłów regulacyjnych oraz projektowanie terapii ukierunkowanych na strukturalne właściwości sieci biologicznych. W chemoinformatyce grafy atomowe stanowią podstawę predykcji właściwości cząsteczek, co znajduje bezpośrednie zastosowanie w projektowaniu leków oraz nowych materiałów (Gilmer i in., 2017). Spektakularnym przykładem w biologii obliczeniowej jest system AlphaFold (*Google DeepMind*), który zrewolucjonizował przewidywanie struktur białek, modelując relacje przestrzenne aminokwasów za pomocą reprezentacji grafowych (Jumper i in., 2021). W projektowaniu leków modele oparte na grafach doprowadziły m.in. do odkrycia halicyny – innowacyjnego antybiotyku wytypowanego z ogromnych baz związków chemicznych (Stokes i in., 2020).

W cyberbezpieczeństwie grafy umożliwiają analizę złożonych relacji w systemach o wysokiej dynamice i dużej skali. Modelowanie zdarzeń

w postaci struktur grafowych znajduje zastosowanie w systemach wykrywania włamań, ponieważ pozwala ujmować zależności pomiędzy hostami, procesami, przepływami i zdarzeniami systemowymi w sposób trudny do osiągnięcia metodami tabelarycznymi (Zhong i in., 2024). Takie podejście wspiera identyfikację wieloetapowych incydentów oraz relacji pomiędzy pozornie odrębnymi zdarzeniami. Dzięki temu możliwe staje się budowanie systemów bezpieczeństwa zdolnych nie tylko do reakcji, lecz również do predykcji potencjalnych konsekwencji incydentów. W praktyce inżynierskiej podejście to realizowane jest poprzez tworzenie tzw. grafów pochodzenia (*provenance graphs*), które umożliwiają detekcję zaawansowanych ataków typu APT (*advanced persistent threats*). Systemy te śledzą wielomiesięczne trajektorie działań intruzów – od początkowej infekcji po eksfiltrację danych – wiążąc z pozoru niezwiązane zdarzenia w spójną sieć zależności.

W telekomunikacji grafy wykorzystywane są do modelowania infrastruktury sieciowej, przepływu danych oraz zależności pomiędzy komponentami systemów 5G i 6G. Dynamiczny charakter tych sieci wymaga stosowania algorytmów adaptacyjnych, zdolnych do bieżącej optymalizacji trasowania i alokacji zasobów. W tym kontekście rośnie znaczenie modeli GNN wspierających optymalizację routingu w sieciach komunikacyjnych nowej generacji (Jiang i in., 2024). Znaczenie tych metod rośnie szczególnie w kontekście Internetu Rzeczy, w którym miliardy urządzeń tworzą struktury o silnie złożonej topologii.

Przedstawione przykłady ukazują, że grafy przestały pełnić wyłącznie rolę formalnego modelu matematycznego. Stały się one integralnym elementem praktyki inżynierskiej i naukowej, umożliwiającym analizę relacji, hierarchii, zależności temporalnych i semantycznych w systemach o wysokim stopniu złożoności. Wraz z dalszym rozwojem technologii oraz rosnącą dostępnością danych strukturalnych można oczekiwać, że zakres zastosowań metod grafowych będzie się rozszerzał, prowadząc do powstawania nowych modeli analitycznych i predykcyjnych opartych na strukturach relacyjnych.

Nowe kierunki badań w algorytmach grafowych i perspektywy rozwoju

Współczesny rozwój algorytmów grafowych wchodzi w fazę, którą można określić jako przejście od metod czysto analitycznych do podejść

hybrydowych, integrujących elementy statystyki, logiki, geometrii oraz obliczeń nieklasycznych. Podczas gdy wcześniejsze dekady badań koncentrowały się przede wszystkim na optymalizacji algorytmów deterministycznych, obecnie centralnym zagadnieniem staje się modelowanie złożonych, wielowarstwowych i dynamicznych zależności relacyjnych w sposób adekwatny do charakteru współczesnych danych. W tym ujęciu algorytmy grafowe przestają być wyłącznie narzędziem rozwiązywania problemów kombinatorycznych, a stają się fundamentem systemów integrujących reprezentacje symboliczne, probabilistyczne i geometryczne (Hamilton, 2020).

Jednym z najważniejszych kierunków rozwoju pozostaje integracja analizy grafowej z metodami neurosymbolicznymi. Podejścia te łączą formalne struktury wiedzy z elastycznością modeli uczących się, umożliwiając jednocześnie wnioskowanie dedukcyjne oraz uogólnianie na podstawie danych empirycznych. W takich systemach graf pełni rolę strukturalnego nośnika wiedzy, natomiast reguły logiczne działają jako ograniczenia kształtujące proces uczenia. Wskazuje się, że integracja ta może prowadzić do powstawania modeli bardziej interpretowalnych i kontrolowalnych, co ma szczególne znaczenie w obszarach wymagających wysokiej wiarygodności decyzji, takich jak medycyna, prawo czy systemy bezpieczeństwa (Bianchi i in., 2020, s. 57).

Równolegle rozwijane są badania nad wykorzystaniem grafów w kontekście obliczeń kwantowych. Struktury grafowe stanowią naturalny model zależności pomiędzy kubitami oraz elementami obwodów kwantowych. Wykazano, że własności spektralne grafów mogą być odwzorowywane w przestrzeniach Hilberta, co otwiera możliwość konstrukcji kwantowych metod analizy widmowej oraz potencjalnego przyspieszenia problemów takich jak klasteryzacja, wykrywanie społeczności czy analiza przepływów (Biamonte i in., 2017). Choć obecny poziom rozwoju technologii kwantowych ogranicza praktyczne zastosowania tych metod, coraz wyraźniej rysuje się perspektywa systemów hybrydowych, w których klasyczne algorytmy grafowe współdziałają z komponentami kwantowymi.

W szerszej perspektywie przyszłość algorytmów grafowych wiąże się z dalszą integracją różnych paradygmatów obliczeniowych. Obejmuje to rozwój modeli łączących uczenie reprezentacji z formalnymi strukturami wiedzy, eksplorację przestrzeni nieeuklidesowych w modelowaniu hierarchii oraz projektowanie architektur zdolnych do efektywnego działania w warunkach

ekstremalnej skali i dynamiki danych. Graf staje się w tym kontekście nie tylko strukturą danych, lecz ogólnym językiem opisu złożoności, pozwalającym łączyć podejścia symboliczne, probabilistyczne i geometryczne w spójnych ramach obliczeniowych.

Perspektywy rozwoju wskazują zatem, że algorytmy grafowe będą odgrywać rolę integratora paradygmatów sztucznej inteligencji. Ich znaczenie nie ograniczy się do konkretnej klasy problemów, lecz będzie dotyczyć sposobu reprezentowania, przetwarzania i transformacji wiedzy w systemach o rosnącej złożoności. Kierunki rozwoju przesuwają ciężar z algorytmiki „czysto analitycznej” w stronę podejść hybrydowych: neurosymboliki, metod probabilistycznych oraz rozwiązań inspirowanych obliczeniami kwantowymi. O dalszym upowszechnieniu zdecydują: interpretowalność, skalowalność oraz stabilność modeli w warunkach danych dynamicznych i niepewnych.

Podsumowanie i perspektywy integracji metod grafowych w rozwoju współczesnej sztucznej inteligencji

Wraz z rozwojem systemów sztucznej inteligencji grafy przestały pełnić rolę pomocniczego narzędzia opisu struktury i stały się jednym z kluczowych konstruktów teoretycznych umożliwiających integrację różnorodnych metod analizy danych. Transformacja ta nie wynika wyłącznie ze wzrostu ilości danych relacyjnych, lecz z głębszej zmiany paradygmatu – przejścia od przetwarzania izolowanych obiektów do modelowania systemów zależności. Współczesne modele sztucznej inteligencji funkcjonują jako komponenty złożonych systemów poznawczych, w których struktura relacji między elementami wyznacza możliwe ścieżki wnioskowania i uogólniania (Leskovec i in., 2020). W tym kontekście graf staje się jednym z nielicznych formalizmów zdolnych jednocześnie opisywać dynamikę danych i mechanizmy ich transformacji w wiedzę. Centralnym elementem współczesnego podejścia do inteligencji obliczeniowej jest integracja perspektyw symbolicznych, statystycznych i geometrycznych. Grafy umożliwiają zbudowanie wspólnej przestrzeni, w której te trzy warstwy mogą współistnieć i wzajemnie się uzupełniać. Warstwa symboliczna ujawnia się w strukturach wiedzy, ontologiach i regułach zależności; warstwa statystyczna w procesach uczenia reprezentacji oraz modelach probabilistycznych;

warstwa geometryczna w przestrzeniach latentnych, w których odwzorowywane są struktury grafowe. Integracja tych wymiarów pozwala budować systemy nie tylko wykrywające wzorce, lecz także nadające im znaczenie semantyczne oraz zdolne do transferu wiedzy na nowe konteksty (Russell, Norvig, 2021).

Rozwój algorytmów grafowych odzwierciedla zmianę kierunku przepływu wiedzy pomiędzy teorią a zastosowaniami. O ile klasyczna teoria grafów rozwijała się głównie w oparciu o abstrakcyjne analizy matematyczne, współczesne potrzeby aplikacyjne – obejmujące analizę struktur molekularnych, modelowanie relacji temporalnych czy przetwarzanie danych multimodalnych – wymuszają powstawanie nowych narzędzi teoretycznych. Statystyka strukturalna, analiza spektralna oraz współczesne modele uczenia grafowego coraz częściej funkcjonują nie jako odrębne dziedziny, lecz jako wzajemnie powiązane elementy jednego ekosystemu metod analizy danych relacyjnych (Hamilton, 2020; Zhang i in., 2020). W tym ujęciu graf pełni rolę elementu scalającego. Pozwala on jednocześnie operować na poziomie lokalnych relacji i globalnych własności systemu, a także modelować zarówno strukturę danych, jak i dynamikę procesów obliczeniowych. W wielu współczesnych podejściach graf staje się metastrukturą, w której zakodowane są relacje między jednostkami wiedzy, ograniczenia logiczne oraz ścieżki inferencyjne. Zjawisko to jest szczególnie widoczne w systemach neurosymbolicznych i w dynamicznych grafach wiedzy, gdzie struktura i proces uczenia współdeterminują zachowanie modelu (Besold i in., 2017).

W wymiarze praktycznym grafy umożliwiają integrację heterogenicznych typów danych – od sekwencji i obrazów po sygnały przestrzenne i informacje semantyczne – w ramach jednej struktury relacyjnej. Pozwala to budować systemy wielowarstwowego wnioskowania, w których graf organizuje przepływ informacji pomiędzy różnymi modalnościami. Takie podejście zwiększa zarówno skalowalność, jak i precyzję modeli predykcyjnych, szczególnie w zastosowaniach wymagających łączenia wiedzy strukturalnej i kontekstowej (Zhang i in., 2020). Ostatecznie rozwój algorytmów grafowych prowadzi do nowego rozumienia relacyjności w sztucznej inteligencji. Graf nie jest już jedynie strukturą danych ani narzędziem analizy topologicznej. Staje się uniwersalnym językiem opisu złożoności, w którym integrują się paradygmaty symboliczne, probabilistyczne i geometryczne. Wraz z rozwojem metod neurosymbolicznych, systemów dynamicznych oraz architektur hybrydowych – w tym

rozwiązań wykorzystujących obliczenia kwantowe – grafy będą odgrywać rolę podstawowego modelu organizującego wiedzę i procesy obliczeniowe. W tym sensie przyszłość badań nad sztuczną inteligencją w coraz większym stopniu będzie przyszłością metod grafowych.

Literatura

1. Barabási, A.-L. (2016). *Network science*. Cambridge University Press.
2. Bellman, R. (1958). On a routing problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 16(1), 87-90. <https://doi.org/10.1090/qam/102435>
3. Besold, T. R., d'Avila Garcez, A., Bader, S., Bowman, H., Domingos, P., Hitzler, P., Kühnberger, K.-U., Lamb, L. C., Lowd, D., Machado Vieira Lima, P., de Penning, L., Pinkas, G., Poon, H., Zaverucha, G. (2017). Neural-symbolic learning and reasoning: a survey and interpretation. *arXiv*, 1711.03902. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.03902>
4. Biamonte, J., Wittek, P., Pancotti, N., Rebentrost, P., Wiebe, N., Lloyd, S. (2017). Quantum machine learning. *Nature*, 549, 487489. <https://doi.org/10.1038/nature23474>
5. Bronstein, M. M., Bruna, J., LeCun, Y., Szlam, A., Vandergheynst, P. (2017). Geometric deep learning: Going beyond Euclidean data. *IEEE Signal Processing Magazine*, 34(4), 18-42. <https://doi.org/10.1109/MSP.2017.2693418>
6. Bronstein, M. M., Bruna, J., Cohen, T., Veličković, P. (2021). *Geometric deep learning: Grids, groups, graphs, geodesics, and gauges*. MIT Press.
7. Chen, J., Ma, T., Xiao, C. (2018). FastGCN: Fast learning with graph convolutional networks via importance sampling. In *Proceedings of the International Conference on Learning Representations (ICLR)*. *arXiv*. 1801.10247. <https://arxiv.org/abs/1801.10247>
8. Chung, F. R. K. (1997). *Spectral graph theory*. American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/cbms/092>
9. Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C. (2022). *Introduction to algorithms* (4th ed.). MIT Press.
10. Bianchi, F., Rossiello, G., Costabello, L., Palmonari, M., Minervini, P. (2020). Knowledge graph embeddings and explainable AI. W: I. Tiddi, F. Lécué, P. Hitzler (red.), *Knowledge graphs for eXplainable artificial intelligence: Foundations, applications and challenges* (s. 49-72). IOS Press. <https://doi.org/10.3233/SSW200011>

11. Diestel, R. (2018). *Graph theory* (5th ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-53622-3>
12. Dijkstra, E. W. (1959). A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1, 269-271. <https://doi.org/10.1007/BF01386390>
13. Ford, L. R., Jr., Fulkerson, D. R. (1962). *Flows in networks*. Princeton University Press. <https://doi.org/10.1515/9781400875184>
14. Gama, F., Isufi, E., Leus, G., Ribeiro, A. (2020). Graphs, Convolutions, and Neural Networks: From Graph Filters to graph neural networks. *IEEE Signal Processing Magazine*, 37(6), 128-138. <https://doi.org/10.1109/MSP.2020.3016143>
15. Gilmer, J., Schoenholz, S. S., Riley, P. F., Vinyals, O., Dahl, G. E. (2017). Neural message passing for quantum chemistry. *arXiv*, 1704.01212. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1704.01212>
16. Hamilton, W. L. (2020). *Graph representation learning*. Morgan & Claypool. <https://doi.org/10.2200/s01045ed1v01y202009aim046>
17. Hamilton, W. L., Ying, Z., Leskovec, J. (2017). Inductive representation learning on large graphs. *arXiv*, 1706.02216. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1706.02216>
18. Jiang, W., Han, H., Zhang, Y., Wang, J., He, M., Gu, W., Mu, J., Cheng, X. (2024). Graph neural networks for routing optimization: challenges and opportunities. *Sustainability*, 16(21), 9239. <https://doi.org/10.3390/su16219239>
19. Jumper, J., Evans, R., Pritzel, A., Green, T., Figurnov, M., Ronneberger, O., Tunyasuvunakool, K., Bates, R., Židek, A., Potapenko, A., Bridgland, A., Meyer, C., Kohl, S. A. A., Ballard, A. J., Cowie, A., Romera-Paredes, B., Nikolov, S., Jain, R., Adler, J. (...), Hassabis, D. (2021). Highly accurate protein structure prediction with AlphaFold. *Nature*, 596, 583-589. <https://doi.org/10.1038/s41586-021-03819-2>
20. Kim, J., Nguyen, T. D., Min, S., Cho, S., Lee, M., Lee, H., Hong, S. (2022). Pure transformers are powerful graph learners. *arXiv*, 2207.02505. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2207.02505>
21. Kipf, T. N., Welling, M. (2017). Semi-supervised classification with graph convolutional networks. *arXiv*, 1609.02907. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1609.02907>
22. Koller, D., Friedman, N. (2009). *Probabilistic graphical models: Principles and techniques*. MIT Press.

23. Kruskal, J. B. (1956). On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7, 48-50. <https://doi.org/10.2307/2033241>
24. Leskovec, J., Rajaraman, A., Ullman, J. D. (2020). *Mining of massive datasets* (3rd ed.). Cambridge University Press.
25. Malewicz, G., Austern, M. H., Bik, A. J. C., Dehnert, J. C., Horn, I., Leiser, N., Czajkowski, G. (2010). Pregel: A system for large-scale graph processing. W: *Proceedings of the 2010 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data* (s. 135-146). Association for Computing Machinery. <https://doi.org/10.1145/1807167.1807184>
26. Manning, C. D., Schütze, H. (1999). *Foundations of statistical natural language processing*. MIT Press.
27. Newman, M. (2018). *Networks* (2nd ed.). Oxford University Press.
28. Nickel, M., Kiela, D. (2017). Poincaré embeddings for learning hierarchical representations. *arXiv*, 1705.08039. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1705.08039>
29. Rampášek, L., Galkin, M., Dwivedi, V. P., Luu, A. T., Wolf, G., Beaini, D. (2022). Recipe for a general, powerful, scalable graph transformer. *arXiv*, 2205.12454. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.12454>
30. Russell, S., Norvig, P. (2021). *Artificial intelligence: A modern approach* (4th ed.). Pearson.
31. Spielman, D. A., Srivastava, N. (2011). Graph sparsification by effective resistances. *SIAM Journal on Computing*, 40(6), 1913-1926. <https://doi.org/10.1137/080734029>
32. Stokes, J. M., Yang, K., Swanson, K., Jin, W., Cubillos-Ruiz, A., Donghia, N. M., MacNair, C. R., French, S., Carfrae, L. A., Bloom-Ackermann, Z., Tran, V. M., Chiappino-Pepe, A., Badran, A. H., Andrews, I. W., Chory, E. J., Church, G. M., Brown, E. D., Jaakkola, T. S., Barzilay, R., Collins, J. J. (2020). A deep learning approach to antibiotic discovery. *Cell*, 180(4), 688-702.e13. <https://doi.org/10.1016/j.cell.2020.01.021>
33. Veličković, P., Cucurull, G., Casanova, A., Romero, A., Liò, P., Bengio, Y. (2018). Graph attention networks. *arXiv*, 1710.10903. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1710.10903>
34. Wu, S., Sun, F., Zhang, W., Xie, X., Cui, B. (2022). Graph neural networks in recommender systems: A survey. *ACM Computing Surveys*, 55(5), 97. <https://doi.org/10.1145/3535101>

35. Xu, K., Hu, W., Leskovec, J., Jegelka, S. (2019). How powerful are graph neural networks?. *arXiv*, 1810.00826. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1810.00826>
36. Ying, Z., You, J., Morris, C., Ren, X., Hamilton, W. L., Leskovec, J. (2018). Hierarchical graph representation learning with differentiable pooling. *arXiv*, 1806.08804. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1806.08804>
37. Zhang, Z., Cui, P., Zhu, W. (2022). Deep learning on graphs: A survey. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 34(1), 249-270. <https://doi.org/10.1109/TKDE.2020.2981333>
38. Zhong, M., Lin, M., Zhang, C., Xu, Z. (2024). A Survey on Graph Neural Networks for Intrusion Detection Systems: Methods, Trends and Challenges. *Computers & Security*, 141, 103821. <https://doi.org/10.1016/j.cose.2024.103821>