

ANALIZA STANU NAPRĘŻENIA I MECHANIZMU ZARYSOWANIA BELKI ŻELBETOWEJ OBCIĄŻONEJ STATYCZNIE

¹Piotr Smarzewski, ²Danuta Barnat-Hunek

Politechnika Lubelska

Wydział Budownictwa i Architektury, ul. Nadbystrzycka 40, 20-618 Lublin

¹Katedra Konstrukcji Budowlanych, e-mail: p.smarzewski@pollub.pl

²Katedra Budownictwa Ogólnego, e-mail: d.barnat-hunek@pollub.pl

Streszczenie:

W niniejszej pracy przedstawiono analizę stanu naprężenia i mechanizmu zarysowania modelowej zginanej belki żelbetowej, traktowanej, jako kompozycja materiałowa składająca się z betonu wzmocnionego wiotkimi prętami stalowymi rozłożonymi dyskretnie w matrycy. W celu weryfikowania poprawności założonych modeli materiałów konstrukcyjnych: betonu i stali zbrojeniowej, porównano otrzymane wyniki obliczeń numerycznych z wynikami obliczeń analitycznych.

Słowa kluczowe: metoda elementów skończonych, konstrukcje żelbetowe, belki

Wstęp

W większości przypadków konstrukcje żelbetowe projektowane są metodami uproszczonymi w oparciu o wyniki doświadczalne. Chociaż tradycyjne metody empiryczne są wystarczające do projektowania typowych konstrukcji żelbetowych, to jednak zastosowanie metody elementów skończonych umożliwia wykonywanie bardzo dokładnych analiz złożonych ustrojów konstrukcyjnych.

W ostatnich latach problemy mechaniki konstrukcji żelbetowych rozwiązywane są przy zastosowaniu metody elementów skończonych, co jest ściśle związane z większymi możliwościami metod i systemów obliczeniowych. Oprogramowanie systemowe zastosowane do modelowania zachowania konstrukcji szczególnie w zakresie nieliniowym jest bardzo efektywne zwłaszcza w odniesieniu do tak zwanych otwartych systemów, w których można implementować własne modele konstytutywne. Główną przeszkodą w wykorzystaniu metody elementów skończonych w obliczeniach konstrukcji żelbetowych jest trudność modelowania właściwości materiałów związana przede wszystkim z jego kompozytową budową.

W celu weryfikowania poprawności założonego modelu materiału i zastosowanej metody obliczeniowej należy porównywać otrzymane wyniki obliczeń numerycznych z wynikami doświadczalnymi oraz z wynikami obliczeń analitycznych.

Przedmiotem pracy jest belka żelbetowa traktowana, jako kompozycja materiałowa składająca się z betonu wzmocnionego wiotkimi prętami stalowymi rozłożonymi dyskretnie w matrycy.

Celem pracy jest analiza stanu naprężenia i mechanizmu zarysowania belki żelbetowej rozwiązywanej metodą elementów skończonych z uwzględnieniem nieliniowości fizycznych materiałów konstrukcyjnych.

Modelowanie belki żelbetowej

W modelu betonu belki przyjęto graniczną jednoosiową wytrzymałość na ściskanie $f'_c = 35$ MPa, moduł sprężystości $E_c = 34$ GPa, współczynnik Poissona $\nu_c = 0.2$, graniczną jednoosiową wytrzymałość na rozciąganie $f_t = 3.2$ MPa. W modelu stali zbrojenio-
wej założono charakterystyczną granicę plastyczności $f_{yk} = 410$ MPa, moduł sprężystości $E_s = 200$ GPa, współczynnik Poissona $\nu_s = 0.3$.

Relację naprężenie-odkształcenie przy jednoosiowym ściskaniu otrzymano z poniższych równań opisujących wieloliniową izotropową krzywą naprężenie-odkształcenie betonu (MacGregor 1992):

$$\sigma = \frac{E_c \cdot \varepsilon}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2} \quad (1)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{2 \cdot f'_c}{E_c} \quad (2)$$

$$E_c = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (3)$$

gdzie: ε_0 - odkształcenie odpowiadające wytrzymałości na ściskanie f'_c .

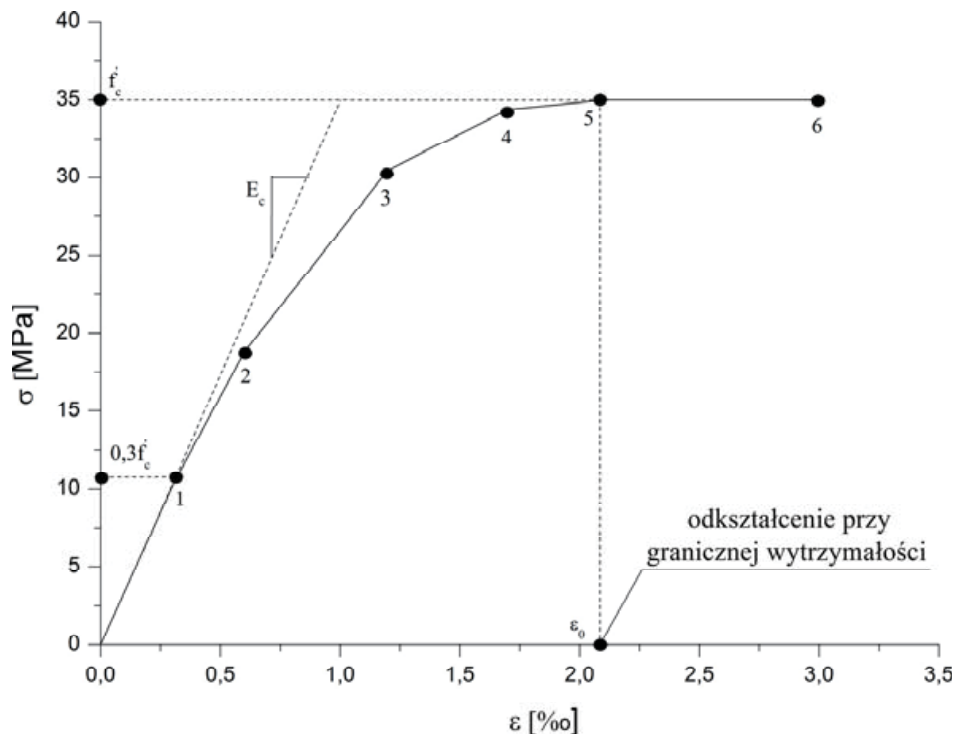
Wieloliniowa izotropowa zależność naprężenie-odkształcenie wymaga definiowania pierwszego punktu krzywej, dla którego spełnione jest prawo Hooke'a. Krzywą zastosowano w celu poprawienia zbieżności nieliniowego algorytmu rozwiązania, Tabela 1.

Tab. 1. Zestawienie punktów opisujących wieloliniowy wykres σ - ε dla betonu

	Punkt 1	Punkt 2	Punkt 3	Punkt 4	Punkt 5	Punkt 6
σ [MPa]	10.5	18.803	30.454	34.368	35	35
ε [‰]	0.3088	0.6	1.2	1.7	2.1	3

Pierwszy punkt, zdefiniowano w $0.3f_c'$ i oszacowano przedział liniowy (wzór 3). Następne punkty 2, 3 i 4 obliczono ze wzoru 1 dla ε_0 wyznaczonego wg równania 2. Założono odkształcenia i obliczono naprężenia dla każdego odkształcenia. Punkt 5 zdefiniowano dla $\sigma = f_c'$ i ε_0 wyznaczonego wg równania 2, a ostatni punkt 6 dla $\sigma = f_c'$ i $\varepsilon_0 = 0.003$.

Na Rys. 1 przedstawiono zależność wykorzystaną w modelu betonu, opartą na pracy Kachlakeva i in. 2001.

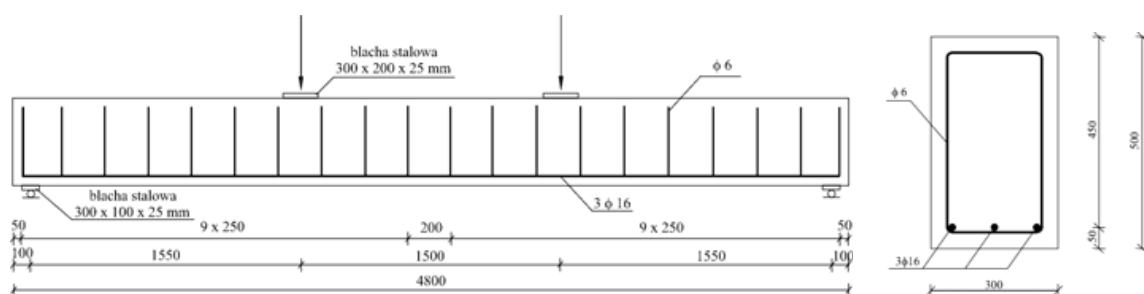


Rys. 1. Wykres jednoosiowe naprężenie-odkształcenie betonu

Model żelbetu uwzględnia możliwość kruchego zniszczenia betonu podatnego na zarysowanie przy rozciąganiu i miażdżenie przy ściskaniu oraz deformacje plastyczne stali zbrojeniowej i betonu. Powierzchnia graniczna betonu była zgodna z teorią Willama-Warnke 1975, uwzględniającą pięć parametrów materiałowych. W zarysowanym betonie uwzględniono możliwość jego wzmocnienia przy ścinaniu przez definiowanie współczynników ścinania przy rysach otwartych β_t i zamkniętych β_c . W odniesieniu do stali zbrojeniowej wykorzystano model materiału sprężysto-idealnie plastycznego, a w odniesieniu do betonu model sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem. Wartość β_t przyjmuje się z prze-

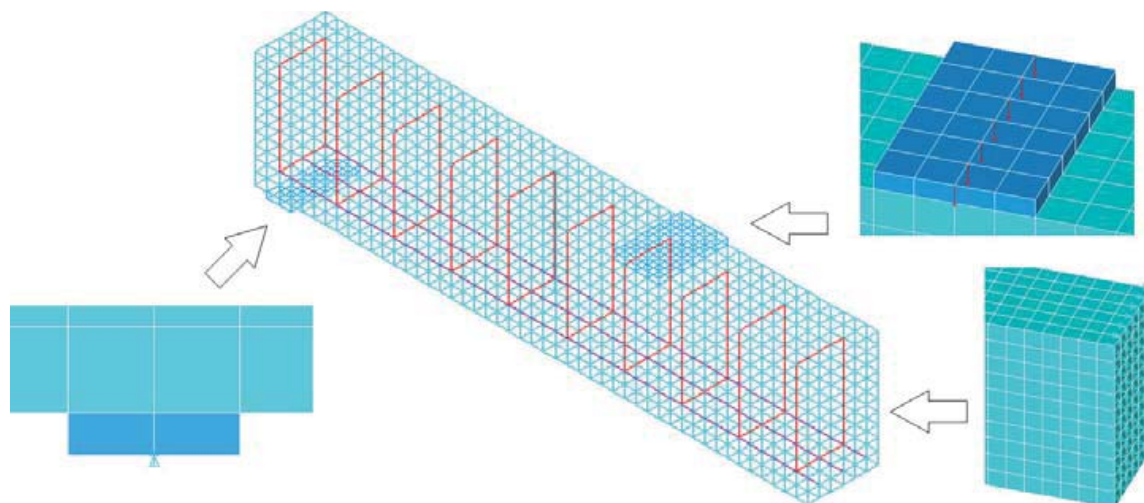
działu od 0 do 1, przy czym 0 odpowiada rysie gładkiej przy całkowitej utracie nośności na ścinanie, a 1 rysie chropowatej bez utraty nośności na ścinanie (ANSYS 2005). W wielu pracach dotyczących konstrukcji żelbetowych wartość β_t przyjmowano z przedziału pomiędzy 0.05 a 0.25 (Bangash 1989, Huyse i in. 1994, Hemmaty i in. 1998, Kachlakev i in. 2001, Wolanski 2004). Wstępne analizy obejmowały różne warianty wartości współczynnika β_t . Ostatecznie ustalono, że jego optymalna wartość wynosi 0.3.

Wymiary analizowanej belki z układem zbrojenia i schematem obciążenia przedstawiono na Rys. 2.



Rys. 2. Układ zbrojenia i schemat obciążenia belki

Modelowano połowę belki po jednej płycie stalowej w punkcie przyłożenia obciążenia i na podporze w związku z podłużną symetrią elementu. Model obciążanej płyty stalowej, podpory stalowej i belki ze zbrojeniem wraz z warunkami brzegowymi przedstawiono na Rys. 3.



Rys. 3. Siatka elementów skończonych i warunki brzegowe

Belkę obciążano do chwili zniszczenia. Obliczenia numeryczne wykonano wg procedury Newtona-Raphsona. Po uzyskaniu zbieżności po każdym etapie obciążenia następowało wznowienie analizy numerycznej. Czas na końcu każdego etapu obciążenia

odpowiadał zastosowanemu obciążeniu. W pierwszym etapie końcowy czas obciążenia wynosił 0.007 co odpowiadało obciążeniu $P = 0.007 \text{ MN} = 7 \text{ kN}$ przyłożonemu bezpośrednio na płytę stalową. Założono mały przyrost obciążenia o stałej wartości równej 0.0875 kN. W analizach zastosowano kryterium zbieżności przemieszczeń o wartości równej 0.25.

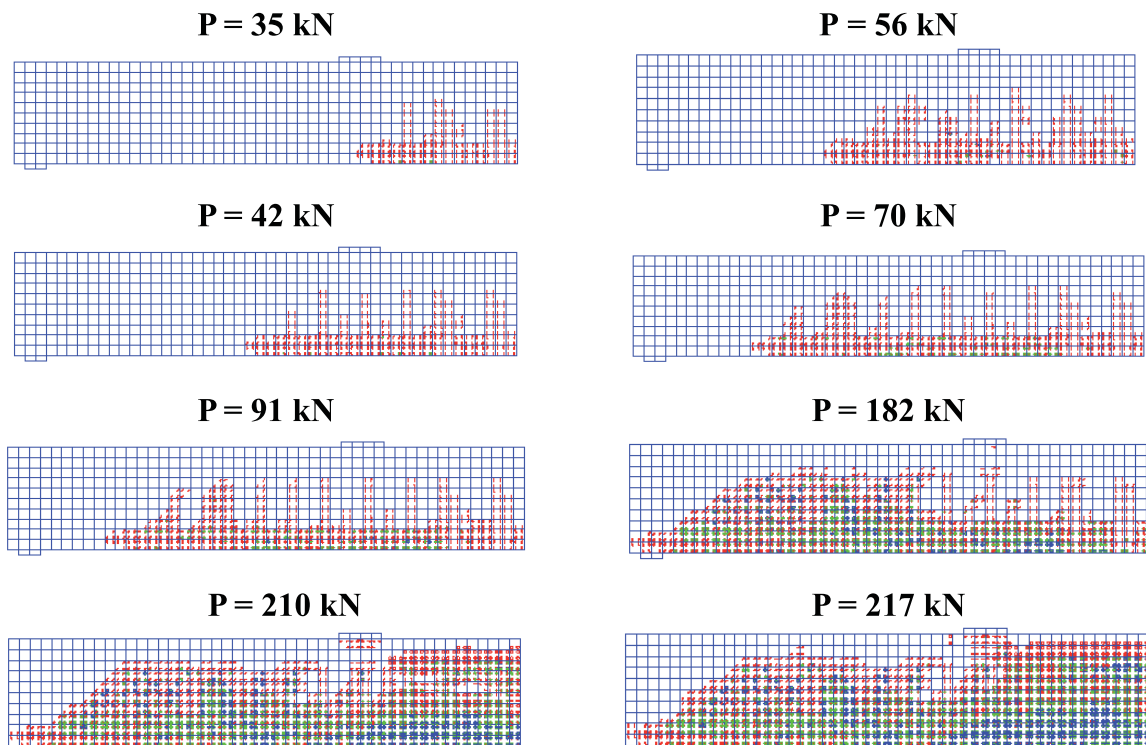
Analiza wyników numerycznych

W obszarze liniowo-sprężystym porównano zgodność przemieszczeń i naprężeń w modelu numerycznym z obliczeniami analitycznymi. Wyznaczono naprężenia betonu, naprężenia stali zbrojeniowej i przemieszczenia pionowe w środku belki pod obciążeniem rysującym 27.5 kN. W Tabeli 2 porównano je z wynikami numerycznymi w chwili powstania pierwszej rysy. W obszarze działania stałego momentu naprężenia w środku rozpiętości belki są równe 3.2 MPa.

Tab. 2. Porównanie wyników analitycznych z wynikami numerycznymi

Model	Naprężenie betonu w strefie rozciąganej σ_{ct} [MPa]	Naprężenie w stali zbrojeniowej σ_s [MPa]	Przemieszczenie pionowe w środku belki V_d [mm]	Siła rysująca P_{cr} [kN]
Obliczenia analityczne	3.20	14.99	0.86	27.50
Obliczenia numeryczne	3.35	15.49	0.93	32.03

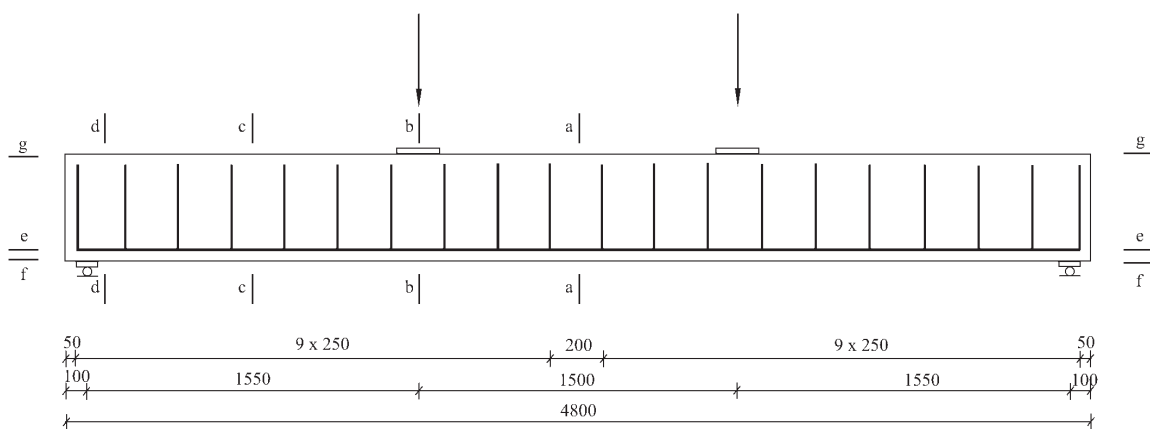
Na Rys. 4 zilustrowano obrazy rys w całym zakresie obciążenia. Na początku rysy od zginania powstawały w połowie rozpiętości belki. W miarę wzrostu obciążenia pionowe rysy rozciągały się poziomo w kierunku podpory. Przy wyższym obciążeniu pojawiały się ukośne rysy od rozciągania. Na końcowych etapach powstały rysy od ściskania pod punktem obciążenia. W obszarze działania stałego momentu zginającego rysy rozwijały się do osiągnięcia obciążenia 35 kN. Następnie zaobserwowano rozwój zarysowania belki w kierunku podpory. Rysy ukośne powstały przy obciążeniu 91 kN.



Rys. 4. Obrazy rys

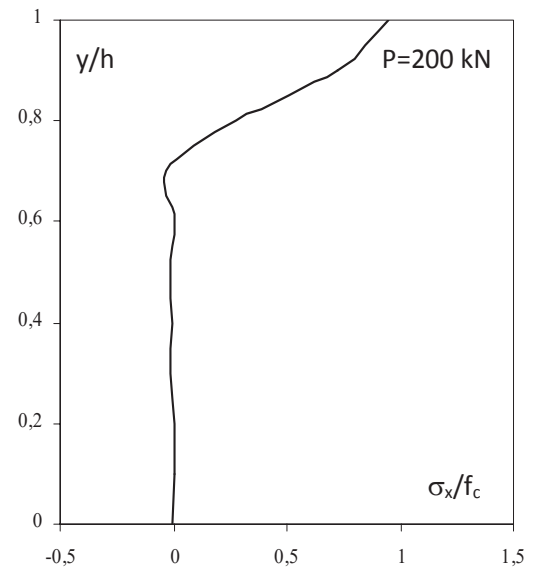
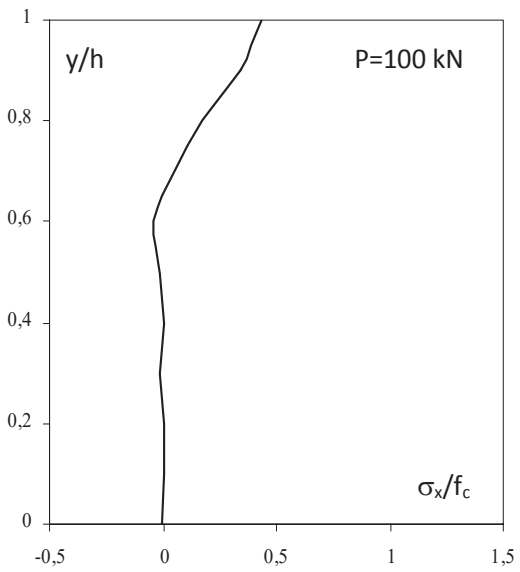
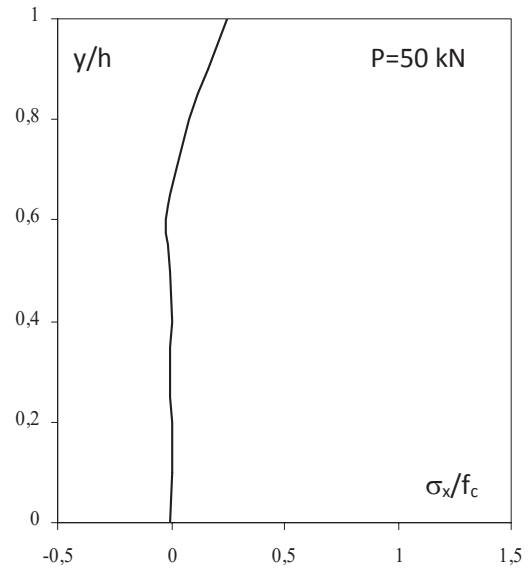
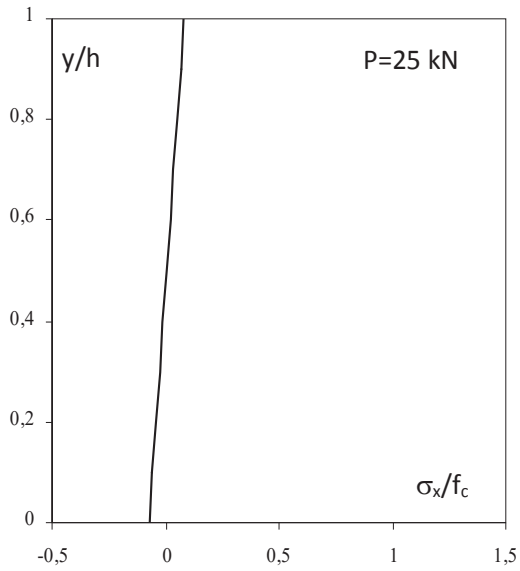
Pierwsze efekty miażdżenia betonu zaobserwowano pod obciążeniem 182 kN. Uplastycznienie stali zbrojeniowej pojawiło się nieco później przy około 200 kN. Zarejestrowano wówczas gwałtowny wzrost przemieszczeń pionowych w środku belki. Stan graniczny nośności wystąpił pod obciążeniem 218 kN, co objawiło się nagłą utratą zbieżności rozwiązania numerycznego.

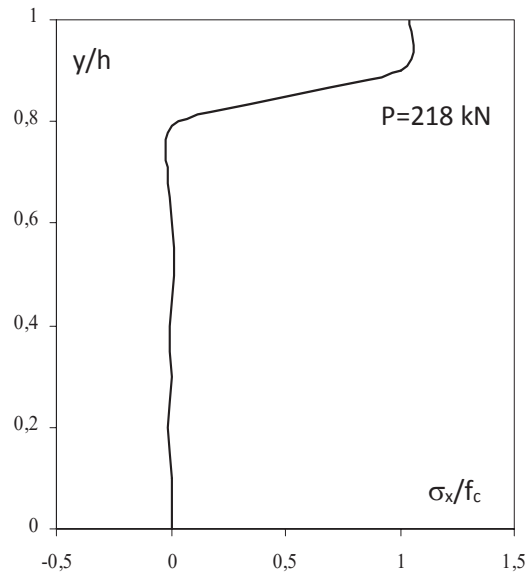
W artykule analizowano stan naprężenia belki żelbetowej. Na Rys. 5 zaznaczono przekroje, w których wykonano rozkłady naprężeń.



Rys. 5. Schemat usytuowania przekrojów obserwacji stanu naprężenia

W pierwszej grupie rysunków przedstawiono rozkłady naprężeń normalnych σ_x , σ_y oraz naprężeń stycznych σ_{xy} w betonie. Wyniki ilustrują zmiany stanu wyężenia belki żelbetowej przy kolejnych poziomach obciążenia zewnętrznego.

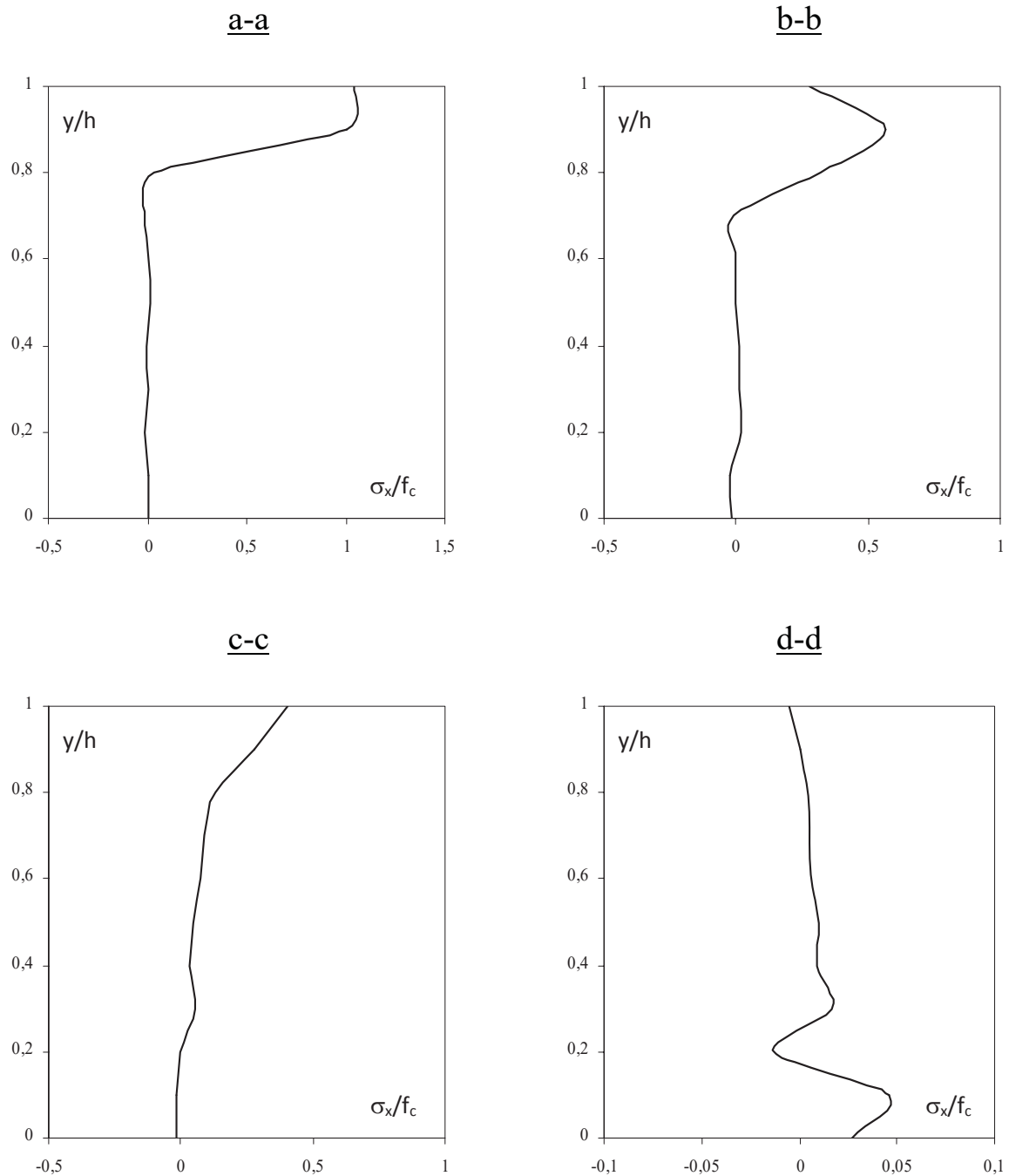




Rys. 6. Rozkład naprężeń normalnych σ_x w przekroju a-a dla różnych poziomów obciążenia

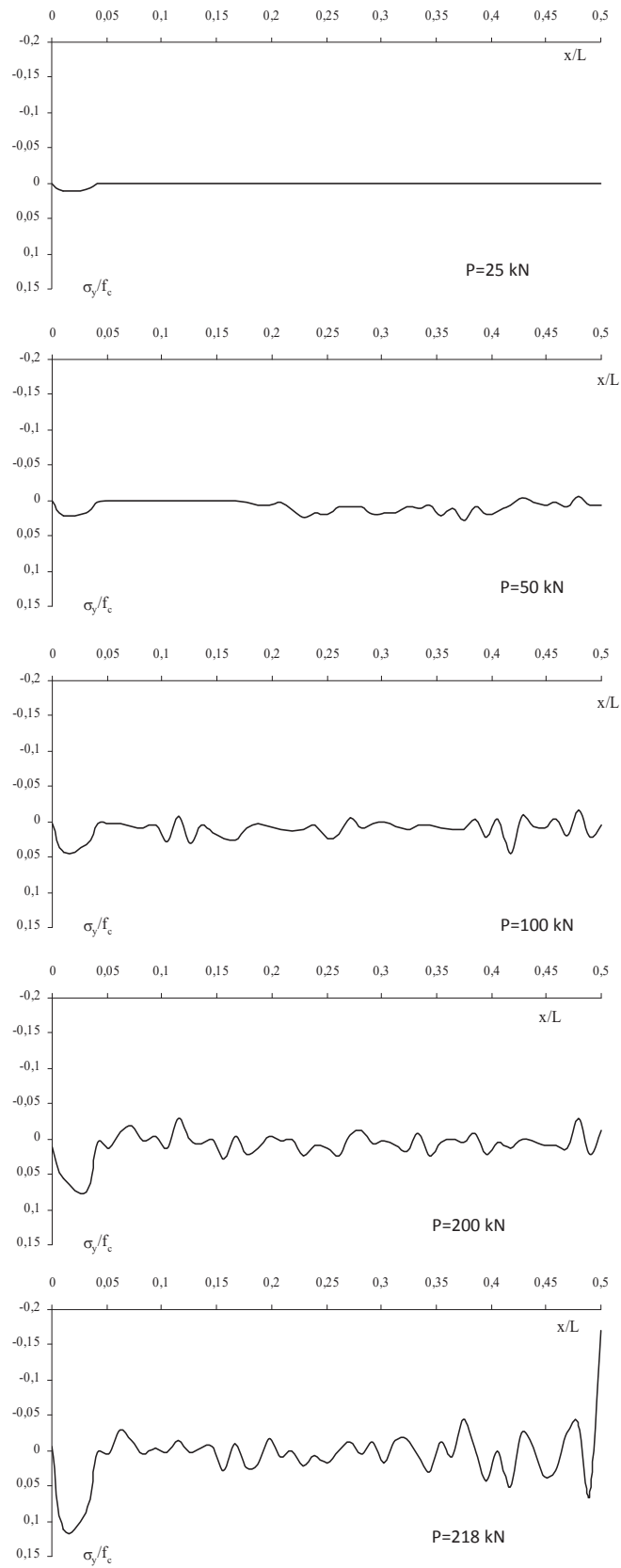
Na Rys. 6 przedstawiono rozkłady naprężeń normalnych σ_x w przekroju pionowym a-a. Przy poziomie obciążenia $P = 25$ kN obserwuje się rozkład naprężeń charakterystyczny w zakresie sprężystej pracy belki. Przy poziomie obciążenia $P = 50$ kN występuje strefa zarysowania przekroju, która powiększa się na kolejnych etapach obciążenia kosztem wysokości ściskanej betonu. Przy obciążeniu $P = 200$ kN, widoczny jest rozwój procesu propagacji rysy, której zasięg dochodzi do około 70% wysokości belki. Tuż przed zniszczeniem przy obciążeniu $P = 218$ kN wysokość obszaru zarysowanego osiąga 80%.

Rozkłady naprężeń normalnych σ_x przed zniszczeniem przy obciążeniu $P = 218$ kN w przekrojach pionowych a-a, b-b, c-c, d-d przedstawiono na Rys. 7. Z uwagi na usytuowanie kolejnych przekrojów proces rozwoju strefy zarysowanej w głąb konstrukcji rozwija się wolniej przy mniejszych wartościach naprężeń.

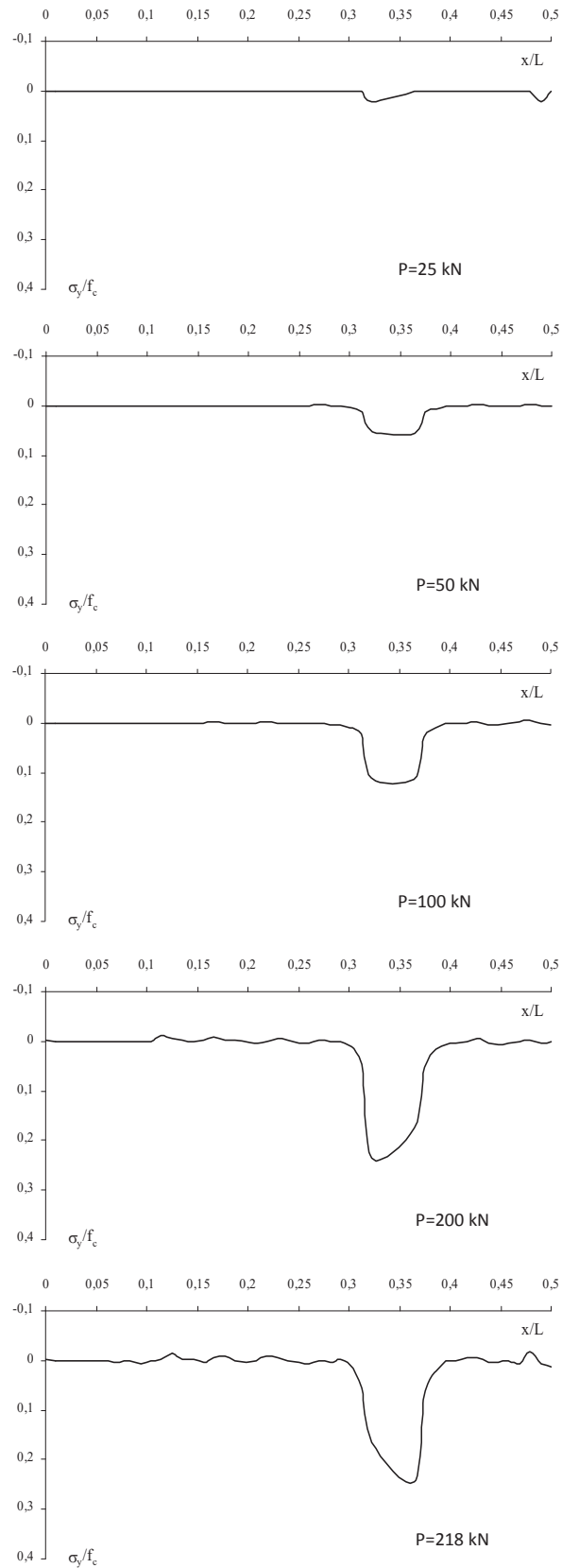


Rys. 7. Rozkład naprężeń normalnych σ_x w przekrojach pionowych a-a, b-b, c-c, d-d przy obciążeniu $P = 218$ kN

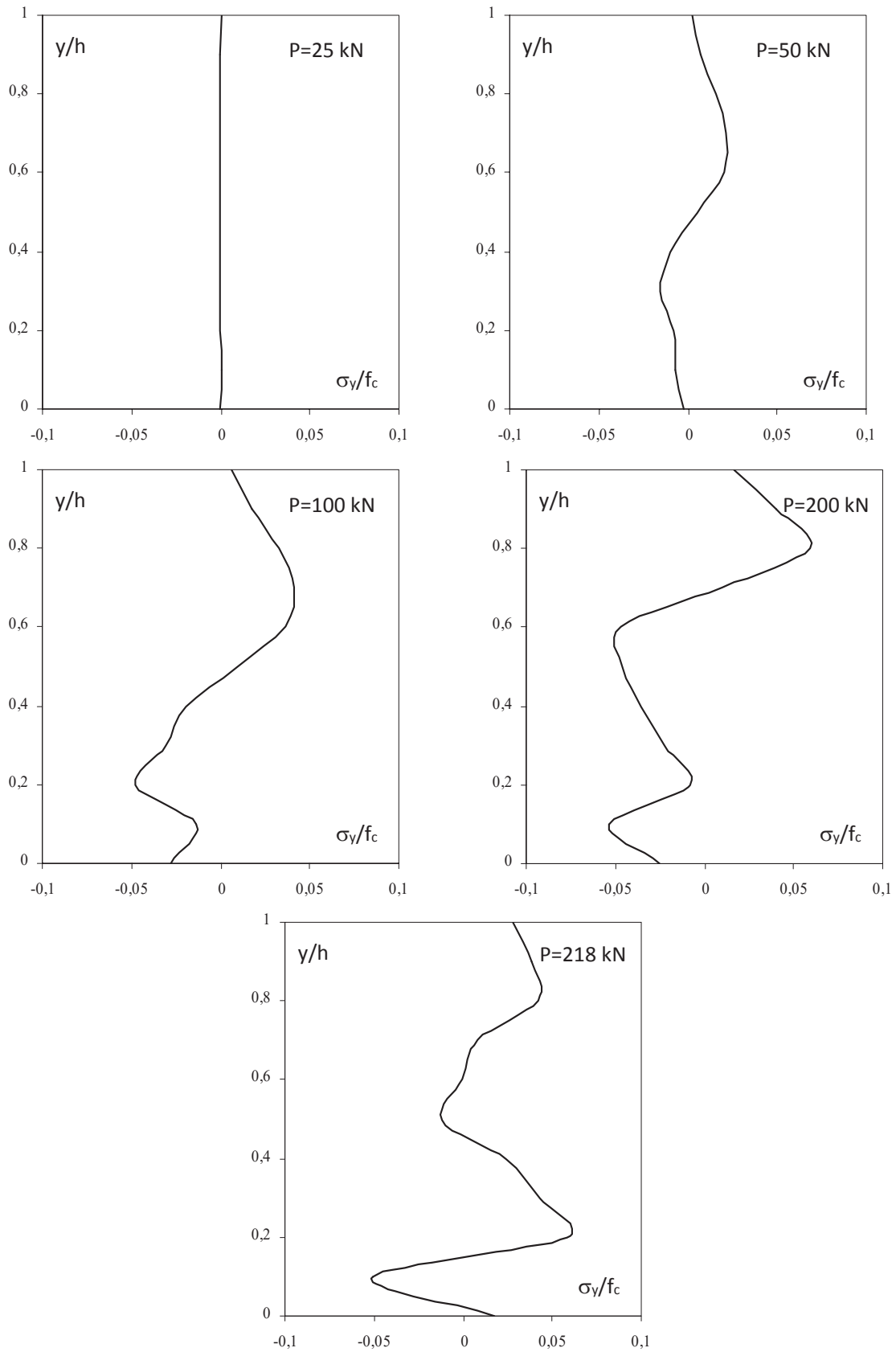
Na następnych rysunkach przedstawiono charakterystyczne rozkłady naprężeń normalnych σ_y w przekrojach poziomych: f-f na Rys. 8, g-g na Rys. 9 i w przekroju pionowym a-a, Rys. 10. Prezentowane rozkłady pionowych naprężeń normalnych są typowe i charakterystyczne dla belki o dużym stopniu zbrojenia.



Rys. 8. Rozkład naprężeń normalnych σ_y w przekroju f-f dla różnych poziomów obciążenia

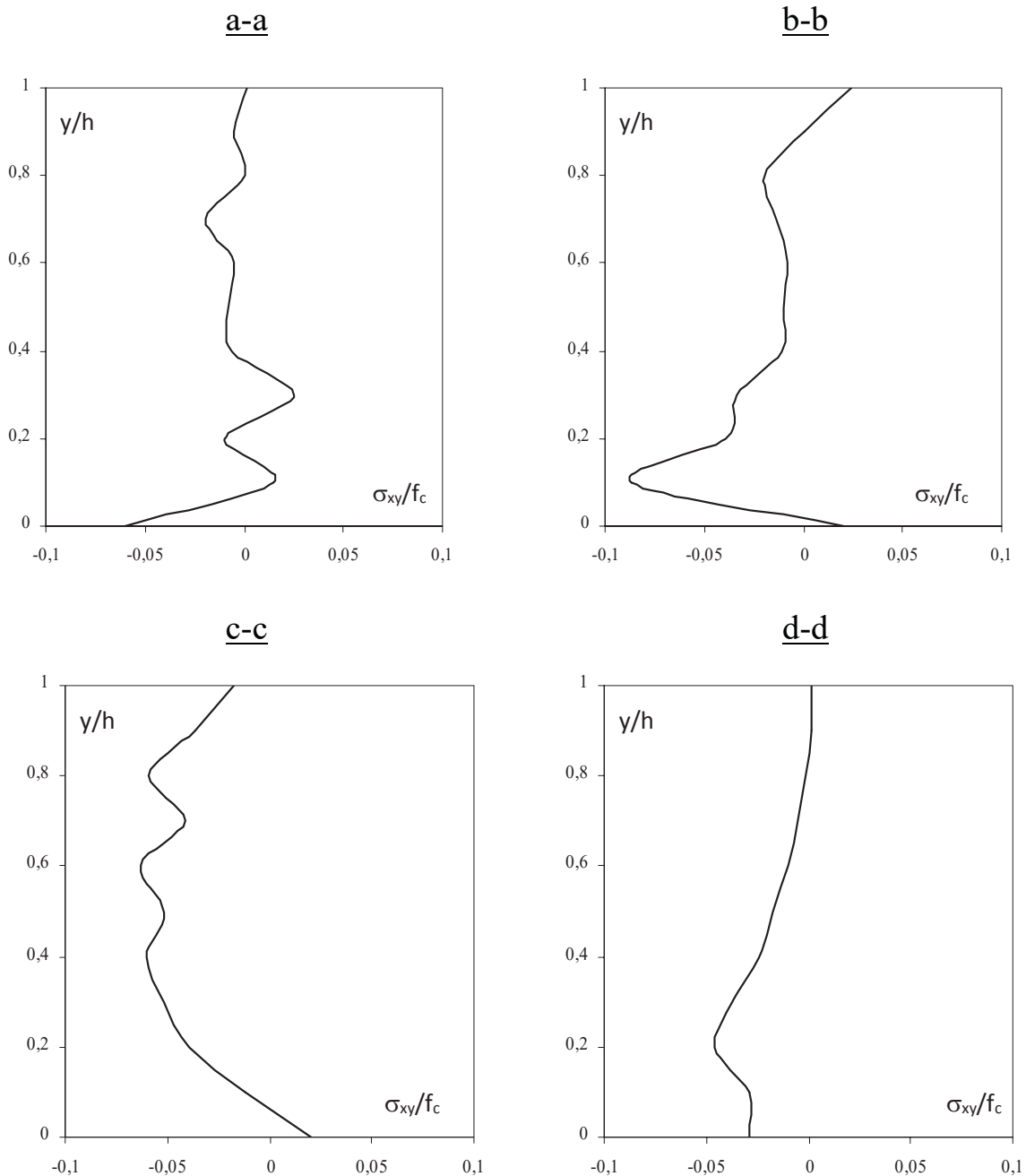


Rys. 9. Rozkład naprężeń normalnych σ_y w przekroju g-g dla różnych poziomów obciążenia



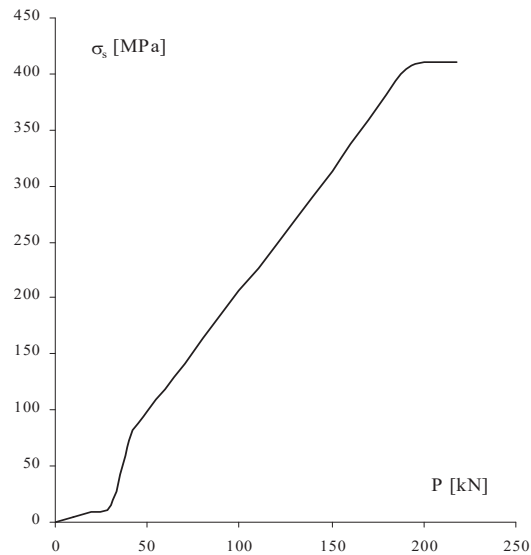
Rys. 10. Rozkład naprężeń normalnych σ_y w przekroju a-a dla różnych poziomów obciążenia

Otrzymane wyniki są jakościowo zgodne z rezultatami eksperymentalnymi. Z kolei na Rys. 11 przedstawiono rozkłady naprężeń stycznych σ_{xy} w przekrojach pionowych a-a, b-b, c-c, d-d przy obciążeniu $P = 218$ kN tuż przed zniszczeniem. Na charakter rozkładu naprężeń mają wpływ efekty niesprężyste, osłabienie materiałowe i zarysowanie.



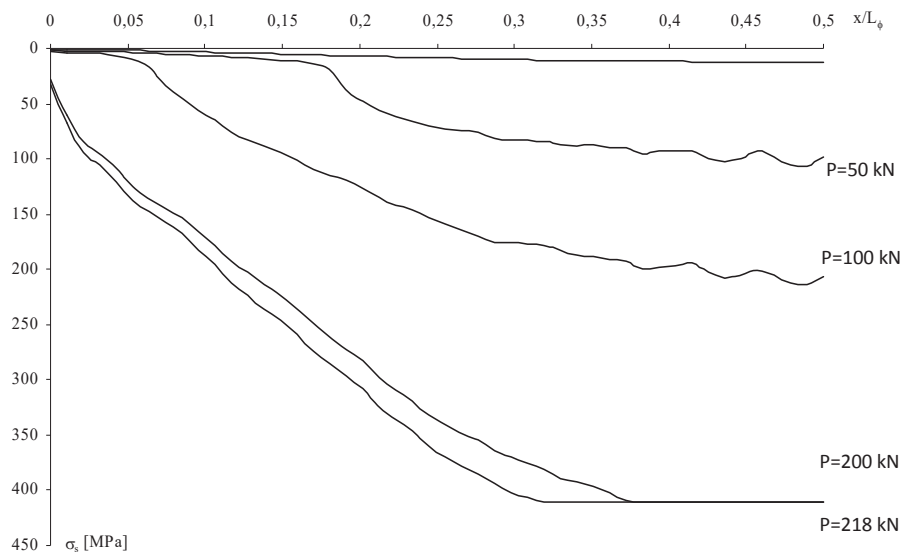
Rys. 11. Rozkład naprężeń stycznych σ_{xy} w przekrojach pionowych a-a, b-b, c-c, d-d przy obciążeniu $P = 218$ kN

Na Rys. 12. przedstawiono zmienność naprężenia w zbrojeniu głównym, w przekroju środkowym belki, w zależności od sumarycznego obciążenia zewnętrznego.



Rys. 12. Zależność naprężenia w zbrojeniu głównym w przekroju środkowym belki od sumarycznego obciążenia zewnętrznego P

Na Rys. 13 przedstawiono rozkłady naprężeń w stali zbrojeniowej w przekroju e-e.



Rys. 13. Naprężenia w prętach zbrojeniowych σ_s w przekroju e-e przy różnych poziomach obciążenia

Wnioski

W pracy oceniono przydatność metody elementów skończonych w nieliniowej przestrzennej analizie belki żelbetowej. Zamodelowano belkę żelbetową przy wykorzystaniu symetrii i rzeczywistych warunków brzegowych. Stalowe pręty zbrojeniowe dyskretnie lokalizowano w modelu w miejscach związanych z siatką betonowego elementu skończonego. Wychwycono początkowe zarysowanie, naprężenia stali, betonu i ugięcia przy sile rysującej oraz porównano wyniki obliczeń numerycznych z wynikami analitycznymi. Prezentowane wyniki odnoszą się do zachowania belki w stanie naprężenia. Stan ten zilustrowano w postaci rozkładów naprężeń w przekrojach charakterystycznych oraz w postaci map przestrzennie zorientowanych rys rozmytych w obszarze matrycy betonowej. Zmiany stanu wyężenia wykazują jakościową zgodność z mechanizmem zniszczenia belek o wysokim stopniu zbrojenia. Na charakter rozkładu naprężeń decydujący wpływ mają przyjęte modele konstytutywne materiałów konstrukcyjnych.

Podziękowania

Wyniki prac były finansowane w ramach środków statutowych Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego nr S/15/2014 i S/14/2014.

Bibliografia:

1. MacGregor J.G. (1992), *Reinforced Concrete Mechanics and Design*. Prentice – Hall. Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
2. Kachlakev D.I., Miller T., Yim S., Chansawat K., Potsiuk T. (2001), *Finite Element Modeling of Reinforced Concrete Structures Strengthened with FRP Laminates*. California Polytechnic State University, at all. May.
3. Willam K.J., Warnke E.P. (1975), *Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete*. Proceedings, International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 19, ISMES, Bergamo, Italy, s. 174.
4. Wolanski B.S. (2004), *Flexural Behavior of Reinforced and Prestressed Concrete Beams Using Finite Element Analysis*. Master's Thesis, Milwaukee, Wisconsin.
5. Huyse L., Hemmaty Y., Vandewalle L. (1994), *Finite Element Modeling of Fiber Reinforced Concrete Beams*. Proceedings of the ANSYS Conference, Vol. 2, Pittsburgh, Pennsylvania.

6. Hemmaty Y., DeRoeck G., Vandewalle L. (1992), *Parametric Study of RC Corner Joints Subjected to Positive Bending Moment by Nonlinear FE Model*. Proceedings of the ANSYS Conference, Vol. 2, Pittsburgh, Pennsylvania.
7. Bangash M.Y.H. (1989), *Concrete and Concrete Structures: Numerical Modeling and Applications*. Elsevier Science Publishers Ltd., London, England.
8. ANSYS (2005), *ANSYS User's Manual Revision 10*. ANSYS, Inc., Canonsburg, Pennsylvania.

Liczba znaków ze spacjami: 27 448